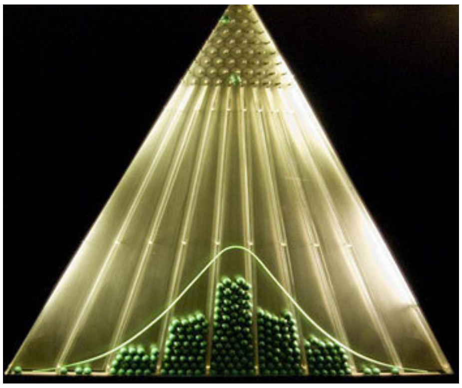
Lois continues

Terminale S



Olivier Lecluse

Mars 2014
1.1

Table des matières

IV - Rappels sur la loi binomiale 23

Objectifs

Dans ce chapitre, nous découvrirons les lois continues comme limite de lois discrètes déjà étudiées, comme la loi binomiale.

Nous verrons en particulier

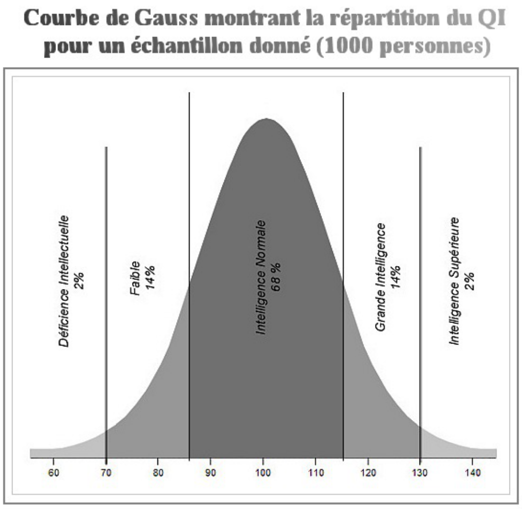
- la notion de variables aléatoires continues et de fonction de densité
- la loi uniforme sur un intervalle (fonction ALEA())
- un rappel sur la loi binomiale
- la loi normale

Introduction

En théorie des probabilités et en statistique, la **loi normale** est l'une des lois de probabilité les plus adaptées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires. Une des premières apparitions de la loi normale est due à Abraham de Moivre en 1733 en approfondissant l'étude d'un jeu de pile ou face. Celui-ci a en effet remarqué que la probabilité de tomber sur k fois PILE dans un jeu de n lancers s'approche d'une courbe en cloche lorsque le nombre de lancer devient très grand.

Elle est également appelée loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss des noms de Laplace (1749-1827) et Gauss (1777-1855), deux mathématiciens, astronomes et physiciens qui l'ont étudiée.

Cette loi était alors considérée comme l'idéal à atteindre par la nature du fait de son omniprésence dans grand nombre de phénomènes physiques, biologiques, sociales, d'où son nom de "normale".



Aujourd'hui, on estime que les variables qui suivent la loi normale sont beaucoup moins nombreuses que ce que l'on pouvait penser à l'époque. Les séries statistiques qui se rapprochent le plus de cette loi concernent essentiellement des variables (poids, dimensions, etc...) observées dans l'industrie pour les fabrications en grande série. En biométrie, un certain nombre de variables quantitatives se distribuent selon la loi normale : poids, rythme cardiaque, périmètre crânien, diamètre des hématies...

Loi à densité sur un intervalle

Avant d'aborder ce chapitre, vous veillerez à visionner la vidéo suivante qui expose la problématique du passage du discret au continu au travers d'un exemple.

Cette vidéo est résumée dans le paragraphe suivant :

1. Activité d'approche : Du discret au continu

Rappel : Variable aléatoire discrète et loi de probabilité

Une variable aléatoire *discrète* ne peut prendre qu'un nombre fini de valeur réelles.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire est le tableau donnant toutes les valeurs k possibles prises par cette variable aléatoire et leur probabilité associée $\mathbb{P}(X = k)$.

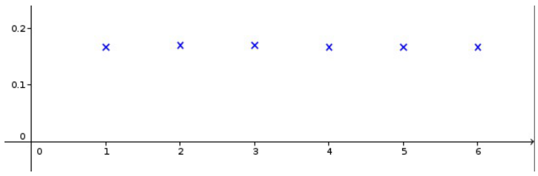
Exemple : Un dé à 6 faces

On lance un dé bien équilibré et on note X le numéro de la face obtenue. La variable aléatoire X peut prendre toutes les valeurs entières 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

La loi de probabilité associée se résume dans le tableau

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Graphiquement, on peut représenter cette loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X par un nuage de points isolés dont la somme des ordonnées vaut 1.



Exemple : Un nombre aléatoire entre 0 et 6

Supposons à présent que l'on fabrique avec un tableur (ou la calculatrice) un nombre réel aléatoire entre 0 et 6 (au moyen de la fonction =ALEA()*6 par exemple). Le nombre résultant de cette expérience constitue une variable aléatoire Y qui peut prendre **toutes les valeurs entre 0 et 6**.

La variable aléatoire Y est dite *continue*, par opposition à la variable aléatoire *discrète* X.

On peut se demander quelle est la probabilité que Y prenne une valeur comprise entre 0 et 3 ?

Intuitivement, on voit que plus l'intervalle cible est large, plus cette probabilité sera importante.

Ici, la largeur de l'intervalle cible est la moitié de l'intervalle contenant toutes les valeurs possibles de notre nombre aléatoire. On se dit donc qu'il y a une chance sur 2 pour que le nombre aléatoire se trouve entre 0 et 3, ce que l'on peut écrire $\mathbb{P}(0 \leqslant Y \leqslant 3) = \frac{1}{2}$

On peut de même comprendre que $\mathbb{P}(1 \leqslant Y \leqslant 4) = \frac{1}{2}$ également puisque l'intervalle $[1\,;4]$ a la même largeur que l'intervalle $[0\,;3]$ et que nos nombres aléatoires sont uniformément répartis sur l'intervalle $[0\,;6]$

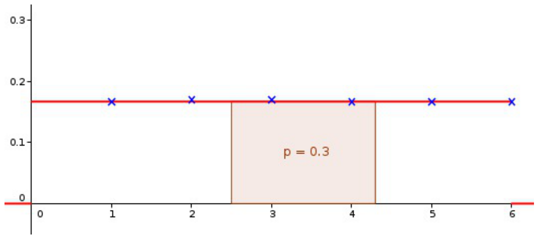
Maintenant si on considère que l'intervalle cible possède une largeur égale au sixième de l'intervalle $[0\,;6]$ (comme par exemple $[1\,;2]$ ou $[4,5\,;5,5]$) on peut prévoir une probabilité que Y soit dans cet intervalle égale à $\frac{1}{6}$.

Et en généralisant cela, on peut dire que si $a, b \in [0\,;6]$ $\mathbb{P}(a \leqslant Y \leqslant b) = \frac{b-a}{6}$

On vérifie alors que la probabilité que le nombre aléatoire soit compris entre 0 et 6 se calcule par :

$\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 6) = \frac{6-0}{6} = 1$

Ce qui est conforme à ce que l'on attend puisqu'il s'agit ici de la probabilité de l'événement certain.

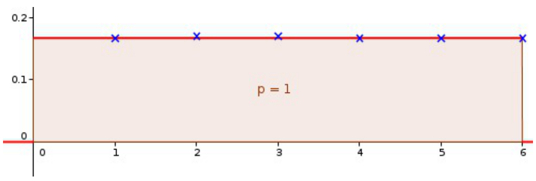


Si on interprète graphiquement cette expérience, on peut s'appuyer sur la fonction constante $f(x) = \frac{1}{6}$ sur l'intervalle $[0\,;6]$. La probabilité qu'un nombre aléatoire compris entre 0 et 6 soit compris entre 2,5 et 4,3 correspond à l'aire du domaine délimité par les droites $x = 2,5$ et $x = 4,3$ d'une part, l'axe des abscisses et la fonction f d'autre part. En d'autres termes, on a :

$\mathbb{P}(2,5 \leq Y \leq 4,3) = \int_{2,5}^{4,3} f(x)\,dx = \frac{1}{6}(4,3-2,5) = 0,3$

La fonction f n'a pas été choisie n'importe comment. Elle doit vérifier pour être cohérente avec notre expérience :

$\int_0^6 f(x)\,dx = 1$ puisque toutes les valeurs de Y sont entre 0 et 6.



Complément : Une conséquence étonnante des lois continues

Dans l'exemple précédent, considérons des intervalles de largeur de plus en plus petite : par exemple $I_n = \left[2 - \frac{1}{n}\,;2 + \frac{1}{n}\right]$

La formule précédente nous montre que $\mathbb{P}(Y \in I_n) = \frac{2/n}{6} = \frac{2}{6n}$

Lorsque n devient grand :

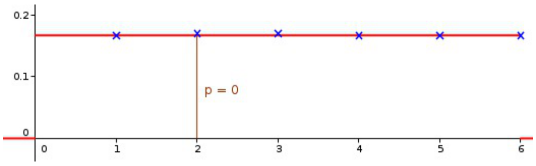
- l'événement $(Y \in I_n)$ se "rapproche" de l'événement $Y = 2$ puisque $\frac{1}{n}$ tend vers 0 : l'amplitude de l'intervalle I_n tend vers 0,
- la probabilité $\frac{2}{6n}$ de cet événement tend vers 0.

On peut donc en conclure que $\mathbb{P}(Y = 2) = 0$! !

Le passage au continu possède donc une conséquence surprenante :

La probabilité d'un nombre en particulier, par exemple la probabilité d'obtenir 2 exactement, **est**

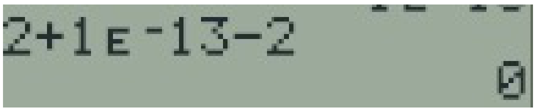
égale à 0 car il y a une infinité de nombres possibles et un seul réalise l'événement ($Y = 2$). On a ainsi $\mathbb{P}(Y = 2) = 0$



On peut aussi justifier ce résultat par :

$\mathbb{P}(Y = 2) = \int_2^2 f(x)\,dx = \frac{1}{6}(2 - 2) = 0$

Remarque : De la difficulté de simuler une loi continue avec une machine



Par conséquent, il est impossible de deviner à l'avance le nombre exact qui sera pris par la variable aléatoire Y.

Si Y est simulée à l'aide d'une calculatrice, on peut obtenir un résultat un peu différent dans la mesure où la calculatrice ne possède pas une précision de calcul infinie comme le montre cette capture effectuée sur une TI83.

Ainsi pour la TI, dans les calculs, tout nombre dans l'intervalle $\left[2 - 10^{-13}\,; 2 + 10^{-13}\right]$ sera assimilé à 2.

Pour la calculatrice, les événements $Y = 2$ et $Y \in \left[2 - 10^{-13}\,; 2 + 10^{-13}\right]$ sont indiscernables du fait de la précision de calcul.

Pour le mathématicien par contre, $\mathbb{P}(Y = 2) = 0$ mais $P\left(Y \in \left[2 - 10^{-13}\,; 2 + 10^{-13}\right]\right) = \frac{2 \cdot 10^{-13}}{6} \neq 0$

Il est donc **possible** de deviner la valeur prise par Y lorsque celle-ci est simulée par la calculatrice, mais avec une probabilité très faible...

La calculatrice - ou les ordinateurs - ne vont donc pas simuler des variables aléatoires continues mais des variables aléatoires discrètes prenant beaucoup de valeurs possibles et se rapprochant donc ainsi du continu, sans toutefois atteindre la perfection.

Dans la suite, on supposera que les simulations effectuées avec la fonction ALEA() ou Random simulent une loi continue.

2. Densité de probabilité

De nouveaux univers

Jusqu'à présent, une expérience aléatoire conduisait à un univers fini et une variable aléatoire X prenait un nombre fini de valeurs. Nous avons vu dans l'exemple précédent qu'il arrive aussi que les issues d'une expérience aléatoire puissent être n'importe quel réel.

Adaptation du modèle

Dans ce cas, sa loi de probabilité, dite *continue*, n'est plus associée à la probabilité de chacune de ses valeurs mais à la probabilité d'intervalles de valeurs.

C'est par un calcul d'aire sous la courbe d'une fonction propre à chaque loi, appelée *densité*, que s'opèrent ces calculs. Une *fonction de densité* est une fonction **continue**, **positive** et dont l' **aire totale** sous sa courbe est **égale à 1**.

Définition : Densité de probabilité

L'*activité - p.42* précédente met en évidence une fonction f sur un intervalle $[a\,; b]$ qui possède les caractéristiques suivantes :

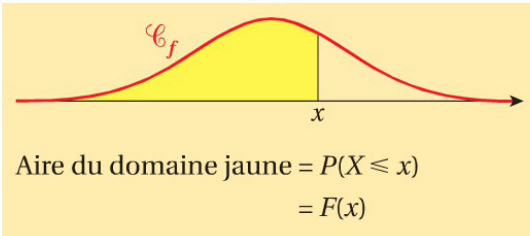
- f est une fonction **continue** et **positive** sur $[a\,; b]$
- $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

Toute fonction f qui remplit ces conditions sur un intervalle $[a\,;b]$ est appelée *densité de probabilité*.

Complément

- Le fait que la fonction f soit continue sur $[a\,;b]$ nous assure de pouvoir calculer les intégrales sur n'importe quel intervalle de $[a\,;b]$.
- Le fait que la fonction f soit positive nous assure de trouver une probabilité qui soit positive !
- Le fait que $\int_a^b f(x)\,dx = 1$ est imposé par le fait que la probabilité de l'événement **certain** est égale à 1.

Définition : Fonction de répartition



Soit X une variable aléatoire continue de densité f.
La *fonction de répartition* associée à la variable aléatoire X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$

3. Exercice : Déterminer une densité de probabilité

Question

[Solution n°1 p 51]

Déterminer k afin que $f : x \longmapsto k\,x^2$ soit une densité de probabilité sur $[0\,;1]$

Indice :

Se rappeler que f doit être continue, positive et que $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

4. Loi de probabilité à densité

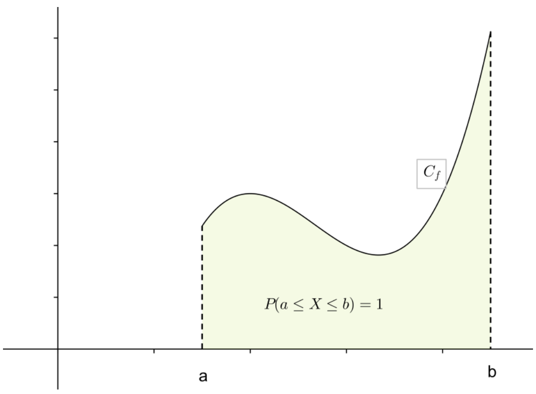
Définition

Soit f une densité de probabilité sur un intervalle $[a\,;b]$.

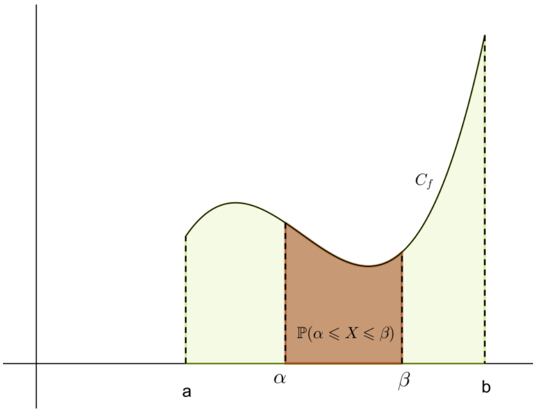
Une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle $[a\,;b]$ suit la loi de densité f lorsque pour tous nombres α et β dans $[a\,;b]$, on a :

$$\mathbb{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

Dans ce cas, la variable aléatoire est dite *continue*.



L'aire du domaine $\{M(x\,;y)\,;x \in [a;b]\ et\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ est égal à 1.



$\mathbb{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$ est égale à l'aire du domaine $\{M(x\,;y)\,;x \in [\alpha;\beta]$ *et* $0 \leq y \leq f(x)\}$

Exemple

Dans le cas d'une variable aléatoire suivant la loi de densité de l'exemple précédent $f(x) = 3x^2$ sur $[0\,;1]$, on a :

- $\mathbb{P}(\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{3}{4}) = \int_{1/4}^{3/4} 3x^2\,dx = \frac{13}{32}$
- $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1} 3x^2\,dx = \frac{7}{8} = 0,875$

Cette dernière probabilité peut s'interpréter à l'aide du graphique suivant :

Exemple

La variable aléatoire donnant la taille d'une personne en cm est une variable aléatoire continue.

Complément

Dans le cas où la variable aléatoire X est continue à valeurs dans un intervalle $[a\,;+\infty[$, on doit s'assurer que la limite de l'aire d'un certain domaine tend vers 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = 1$$

On peut aussi définir de la même façon une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $]-\infty\,;a[$, ou bien encore sur $]-\infty\,;+\infty[$ en découpant le domaine en deux parties et en vérifiant que :

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = 1$$

5. Propriétés des lois à densité sur un intervalle

Fondamental

Soit X une variable aléatoire continue et $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\mathbb{P}(X > \alpha) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant \alpha)$
- $\mathbb{P}(X = \alpha) = 0$
- $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta) = \mathbb{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$

Complément : Démonstration

$$1 - \mathbb{P}(X \leqslant \alpha) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^\alpha f(x)\,dx = \int_\alpha^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

donc $1 - \mathbb{P}(X \leqslant \alpha) = \mathbb{P}(X > \alpha)$ d'après la relation de Chasles

$\mathbb{P}(X = \alpha) = \int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0$ d'après les propriétés des intégrales.

Remarque

Naturellement, les propriétés des probabilités d'événements rencontrées dans le cas discret s'étendent au cas continu. Par exemple :

- $\mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$
- $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

6. Espérance d'une variable aléatoire continue

Rappel

On se rappelle que l'*espérance* - *p.44* d'une variable aléatoire discrète s'obtenait par la somme de toutes les valeurs $x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Dans le cas continu, on va retrouver une formule analogue, l'intégrale venant remplacer la somme discrète.

Fondamental

Soit X une variable aléatoire **continue** de densité $f(x)$ sur $[a\,;b]$.

Alors $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_a^b x\, f(x)\, dx$

7. Exercice : Calculer avec une loi de probabilité continue

On a vu dans le précédent exercice que la fonction $f : x \longmapsto 3\,x^2$ est une densité de probabilité sur $[0\,;1]$.

On considère la variable aléatoire continue X dont $f(x)$ est la loi de densité sur $[0\,;1]$

Question 1

[Solution n°2 p 51]

Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant \frac{1}{3})$

Question 2

[Solution n°3 p 51]

Déterminer la *médiane* de la variable aléatoire X, c'est à dire le nombre m tel que $\mathbb{P}(X \leqslant m) = 0,5$

Indice :

$$\mathbb{P}(X \leqslant m) = \int_0^m 3\,x^2\, dx$$

Question 3

[Solution n°4 p 51]

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X

Indice :

Appliquer simplement la formule du cours

* *

*

Retrouver l'explication de ce cours - en mieux probablement :) sur Youtube

La loi uniforme

Nous avons déjà rencontré la loi uniforme en introduction des lois à densité. C'est cette loi qui s'applique lorsqu'une variable aléatoire prend toute valeur sur un intervalle avec une répartition parfaitement équitable.

La fonction **ALEA()** du tableur ou **Random** de la calculatrice est une parfaite illustration de la loi uniforme sur **[0 ;1[**

1. Définition de la loi uniforme

La loi uniforme se caractérise par une répartition uniforme des valeurs prises par une variable aléatoire continue sur un intervalle [a ;b]. Dès lors, sa fonction de densité est constante sur [a ;b] et nulle en dehors de cet intervalle puisque X n'y prend pas de valeurs.

La valeur de cette constante ne peut être choisie au hasard puisque la fonction de densité f(x) doit vérifier $\int_a^b f(x)\,dx = 1$.

Si $f(x) = k$ pour tout $x \in [a\,;b]$, alors on doit avoir $\int_a^b k\,dx = k \times (b-a) = 1$ donc la valeur prise par la fonction de densité est nécessairement égale à $\frac{1}{b-a}$ afin d'avoir une aire totale délimitée sur $[a\,;b]$ égale à1.

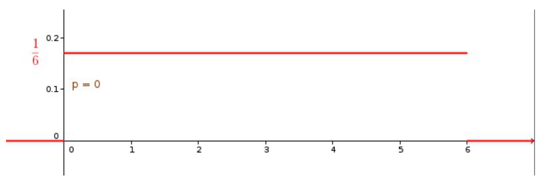
Définition

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Dire qu'une variable aléatoire continue X suit la loi uniforme sur $[a\,;b]$ signifie que sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a\,;b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Si X suit la loi uniforme sur $[a\,;b]$, on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a\,;b]$.



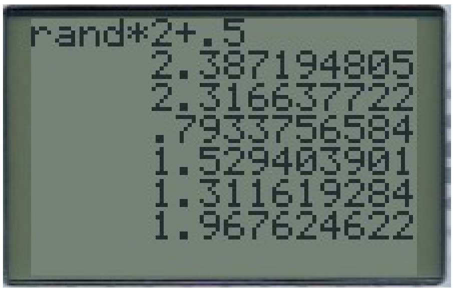
Méthode : Calculer avec la loi uniforme

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a\,;b]$,

alors $\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_c^d = \frac{d-c}{b-a}$

Exemple

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,5\,;2,5]$, on a $\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 1,5) = \dfrac{1,5-1}{2,5-0,5} = 0,25$



Pour simuler une telle variable aléatoire à la calculatrice, on utilise la fonction `rand` ou `NbrAleat` qui se trouve sur TI sous $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\text{PRB}}$ ou sur Casio la fonction `Ran#` sous $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F6}}$ $\boxed{\text{F3}}$ *PROB*.

Cette fonction renvoyant un nombre sur **[0 ;1]**, on **multiplie ce nombre par l'amplitude** $(b-a)$ de l'intervalle, donc ici par 2 pour obtenir un nombre dans **[0 ;2]**, puis **on ajoute 0,5** afin de se ramener dans l'intervalle **[0,5 ;2,5]**.

Sur le tableur, on saisira donc la formule $\boxed{\text{=2*ALEA()+0,5}}$

2. Exercice

Soit T le temps d'attente (en minutes) à un arrêt de bus. Le bus passe toutes les 15 minutes. Ne sachant pas quand est passé le dernier, le bus peut arriver à n'importe quel moment d'ici les 15 prochaines minutes.

On suppose donc que T suit la loi uniforme uniforme sur [0; 15].

Question 1

[Solution n°5 p 51]

Quelle est la probabilité que l'on attende moins de 2 minutes ?

Question 2

[Solution n°6 p 51]

Quelle est la probabilité que l'on attende entre 7 et 12 minutes ?

3. Espérance de la loi uniforme

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a\,;b]$ et $f(x)$ la fonction densité associée, on se souvient que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_a^b x\, f(x)\, dx$

Par conséquent, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b$

Donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \dfrac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \dfrac{b+a}{2}$

Fondamental

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a\,;b]$.

Alors son espérance est donnée par la formule $\mathbb{E}(X) = \dfrac{b+a}{2}$

Complément

Cette espérance s'interprète comme étant la **valeur moyenne** de la variable aléatoire lorsque l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Exemple

Dans l'exercice précédent, le temps d'attente moyen du bus peut s'interpréter comme l'espérance de la variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0\,;15]$. C'est donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{0+15}{2} = 7,5$

Par conséquent, le temps d'attente moyen du bus est estimé à 7 minutes 30.

4. Exercice : Dans une entreprise

Une enquête a révélé que, pour tout le personnel d'une très grosse entreprise, la durée du trajet, exprimée en heure, entre le domicile et le lieu de travail est comprise entre 0,5h et 2h.

Le nombre de salariés étant très important, on supposera que toutes les durées de transport sont représentées de manière uniforme.

On interroge au hasard les salariés sur le temps de transport et on note X la variable aléatoire correspondant à la durée de transport exprimée en heure.

Question 1

[Solution n°7 p 52]

Quelle est la loi suivie par X ?

Question 2

[Solution n°8 p 52]

A l'aide d'un programme sur la calculatrice, simuler les trajets de 10 employés et calculer le temps moyen.

Indices :

On pourra utiliser une variable S calculant la somme des temps de transport

On pourra utiliser une boucle Pour afin de simuler les 10 trajets

La moyenne des temps de transport sera la somme accumulée dans S divisée par 10...

Question 3

[Solution n°9 p 52]

Calculer le temps moyen mis par les employés pour se rendre sur leur lieu de travail.

Comparer ce temps à la simulation faite sur calculatrice. Conclure.

Indice :

Le temps moyen se calcule au moyen de l'espérance.

Loi exponentielle

III

De nos jours, nous avons tous une idée de la probabilité de vivre 40 ans pour un enfant qui vient de naître. Les tables de mortalité donnent un nombre de l'ordre de 0,98. La probabilité de vivre 40 ans de plus, pour une personne de 50 ans, est un nombre bien inférieur, de l'ordre de 0,65. Pour une personne de 60 ans, cette probabilité de vivre 40 ans de plus est de l'ordre de 0,02.

Le fonctionnement naturel des humains et des animaux suit la loi du vieillissement ou de l'usure : on n'a pas la même probabilité de vivre 40 ans de plus lorsque l'on vient de naître ou lorsque l'on a déjà 50 ou 60 ans.

Mais il existe des phénomènes où il n'y a pas de vieillissement ou d'usure. Il s'agit en général de phénomènes accidentels. Pour ces phénomènes, la probabilité, pour un objet d'être encore en vie ou de ne pas tomber en panne avant un délai donné sachant que l'objet est en bon état à un instant t, ne dépend pas de t.

Par exemple, pour un verre en cristal, la probabilité d'être cassé dans les cinq ans ne dépend pas de sa date de fabrication, de son âge. Il en va de même pour les tremblements de terre ou l'éruption d'un volcan.

Dans le domaine de l'électronique, on retrouve également souvent ce type de phénomène sans usure : Par exemple, le microprocesseur de votre ordinateur à une durée de vie théoriquement très élevée : 100 000 h (on appelle ça le MTBF : Mean Time Between Failures). Si vous l'utilisez, disons 6h par jour, cela vous donne 16666 jours environ d'espérance de vie, soit près de 45 ans... Dans ces conditions, on peut estimer que s'il ne vous a pas lâché au bout de 8 jours, la probabilité qu'il tombe en panne le 9è jour est la même que la veille : on parle alors de *durée de vie sans vieillissement*.

Ce sont ces phénomènes que nous allons étudier dans ce chapitre. Nous allons voir qu'ils obéissent à une loi basée sur la fonction exponentielle, que nous nommerons la *loi exponentielle*.

1. Lois insensibles au vieillissement

Loi des variables aleatoires representant une duree de vie sans usure

La durée de vie d'un élément est une variable aléatoire T, à valeurs dans $[0\,;+\infty[$ pour laquelle, t étant un réel positif, l'événement $(T \geqslant t)$ signifie que **l'élément est vivant** à l'instant t.

En remarquant que $(T \geqslant 0)$ est l'événement **certain** et en supposant que $P(T \geqslant t) \neq 0$, la variable aléatoire T représente une *duree de vie sans usure* si et seulement si :

pour tout $s > 0, \mathbb{P}_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t + s) = \mathbb{P}_{(T \geqslant 0)}(T \geqslant s) = \mathbb{P}(T \geqslant s)$

Définition

T vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement si et seulement si par définition

Pour tous réels t et s positifs, $\mathbb{P}_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+s) = \mathbb{P}(T \geqslant s)$

2. Exercice : Introduction à la loi exponentielle

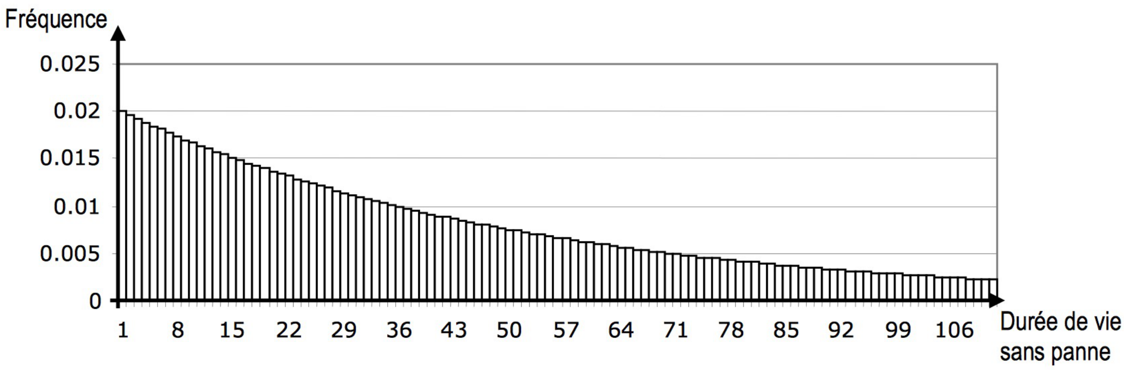
Présentation de l'activité en vidéo

Étude d'une situation

Une entreprise fabriquant des téléviseurs a effectué un suivi de la première panne des appareils qu'elle a fabriqués et vendus.

On a réalisé ci-dessous un histogramme résumant les résultats (on a porté en abscisses la durée en mois et en ordonnées la fréquence). Les classes ont une amplitude de 1 mois.

Par exemple, 1,5% des appareils vendus ont subi leur première panne 16 mois après leur achat par le client.



Le MTBF des téléviseurs étant très important, on supposera que la probabilité que le téléviseur tombe en panne suit une loi sans vieillissement.

Question 1

[Solution n°10 p 52]

On pose $G(t) = \mathbb{P}(T \geqslant t)$ qui est la probabilité qu'un téléviseur soit encore en fonctionnement à l'instant t

Montrer que

- $G(0) = 1$
- pour tous réels positifs t et s $G(t+s) = G(s) \times G(t)$

Indices :

On pourra expliciter la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+s)$

On pourra remarquer que si le téléviseur est encore en fonctionnement au temps t+s, il y est aussi au temps t.

Question 2

[Solution n°11 p 53]

En supposant G dérivable sur $\mathbb{R}^+$, montrer qu'il existe une constante $k \neq 0$ telle que $G'(t) = k \cdot G(t)$

En déduire que $G(t)$ est nécessairement de la forme $G(t) = e^{kt}$

Indice :

On se rappellera le cours sur la construction de la fonction exponentielle - p.47.

Question 3

[Solution n°12 p 53]

Démontrer que le réel k est nécessairement **négatif**.

Par la suite on posera $k = -\lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Indice :

On remarquera que $G(t)$ est une probabilité

Question 4

[Solution n°13 p 54]

On note $F(t) = 1 - G(t) = \mathbb{P}(T \leqslant t)$ et $f(t) = F'(t)$

Calculer $f(t)$ et démontrer que la fonction f ainsi définie est bien une **densité de probabilité** sur $[0\,;+\infty[$

Nous avons donc mis en évidence que si T est une variable aléatoire décrivant un phénomène non soumis au vieillissement, alors sa fonction densité, définie sur $\mathbb{R}^+$, était du type $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ où $\lambda > 0$

La vérification que la loi de densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ où $\lambda > 0$ est une loi sans vieillissement fait l'objet d'une ROC qui sera vue dans le paragraphe suivant.

Nous allons à présent voir des applications de cette loi sans vieillissement que nous nommerons *loi exponentielle*.

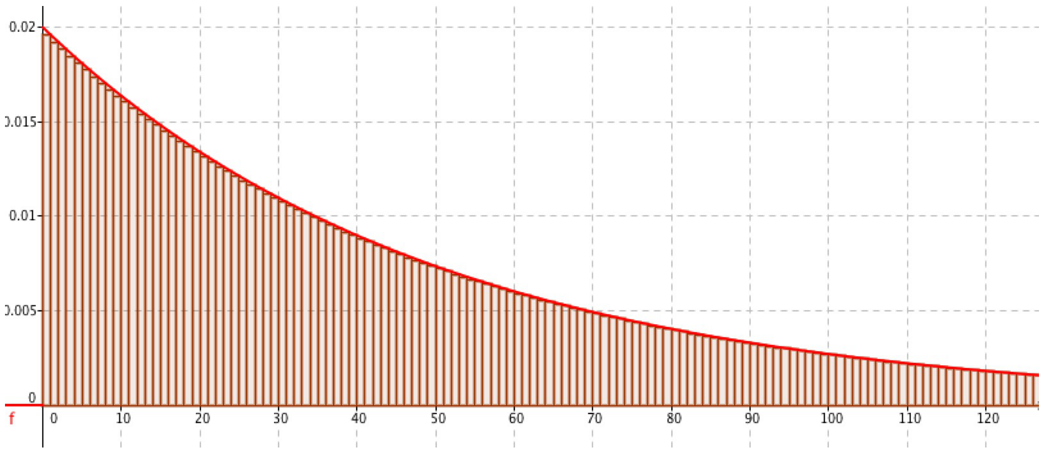
Question 5

[Solution n°14 p 54]

En utilisant la valeur de $f(0)$, déterminer la valeur de λ dans la situation de nos téléviseurs.

Indice :

La fonction densité est la fonction qui relie les sommets de l'histogramme indiquant les probabilités de panne en fonction du nombre de mois sans panne.



On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à acheter un téléviseur de cette marque.

On appelle T la variable aléatoire prenant pour valeur la durée écoulée (en mois) entre l'achat de l'appareil et sa première panne. On admet donc que T suit une loi continue de densité la fonction $f(x) = 0,02e^{-0,02x}$ définie ci-dessus.

Question 6

[Solution n°15 p 54]

Calculer $\mathbb{P}(T < 12)$ et interpréter le résultat.

Question 7

[Solution n°16 p 54]

Calculer la probabilité pour que la première panne survienne dans la 4e année.

Question 8

[Solution n°17 p 55]

Calculer la probabilité que l'appareil fonctionne 5 ans sans une seule panne.

3. Loi exponentielle

Remarque

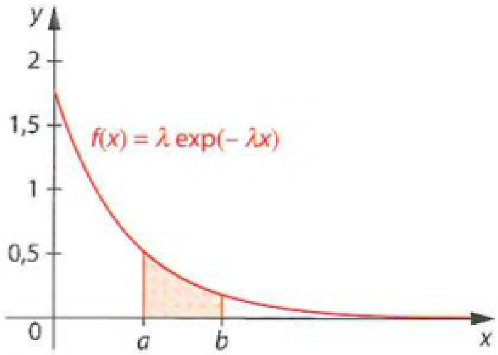
Les lois exponentielles modélisent les processus qui ignorent le vieillissement comme par exemple la durée de vie de certains appareils électroniques, la durée de vie de certains éléments radioactifs ...

Définition : Propriété et Définition de la loi exponentielle

Soit λ un réel **strictement positif**. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$f\ :\ x \longmapsto \lambda e^{-\lambda x}$

est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$



La loi de probabilité $\mathbb{P}$ associée à cette fonction densité est appelée *loi exponentielle* de paramètre λ. On la note $\mathcal{E}(\lambda)$.

Si $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et si a et b sont deux réels tels que $0 \leqslant a < b$, on a

$\mathbb{P}(a \leqslant T \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda t}\right]_a^b$

Complément : Démonstration

- la fonction f est **continue** et **positive** sur $\mathbb{R}^+$
- de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\, dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = (\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-\lambda x}) = 1 - 0 = 1$

La fonction f est donc une fonction densité sur $\mathbb{R}^+$

Complément : Fonction de répartition

Si $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$,

la fonction de répartition de T est la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(t) = \mathbb{P}(T \leqslant t)$ soit

$F\ :\ t \longmapsto 1 - e^{-\lambda t}$

En effet, on a bien $F'(t) = f(t)$

De plus $F(0) = 0 = \mathbb{P}(T \leqslant 0)$ car La variable aléatoire T prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc les événements $(T = 0)$ et $(T \leqslant 0)$ sont identiques. Or ont sait que $\mathbb{P}(T = 0) = 0$ pour une loi continue.

4. Exercice : ROC : La loi exponentielle est une loi sans vieillissement

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.

Alors T vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement à savoir :

Pour tous réels t et s positifs, $\mathbb{P}_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t + s) = \mathbb{P}(T \geqslant s)$

Question

[Solution n°18 p 55]

Démontrer ce résultat

5. Exercice : ROC : Espérance de la loi exponentielle

Soit $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ **une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre** $\lambda > 0$

Alors l'espérance de T est donnée par la formule $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$

Question

[Solution n°19 p 55]

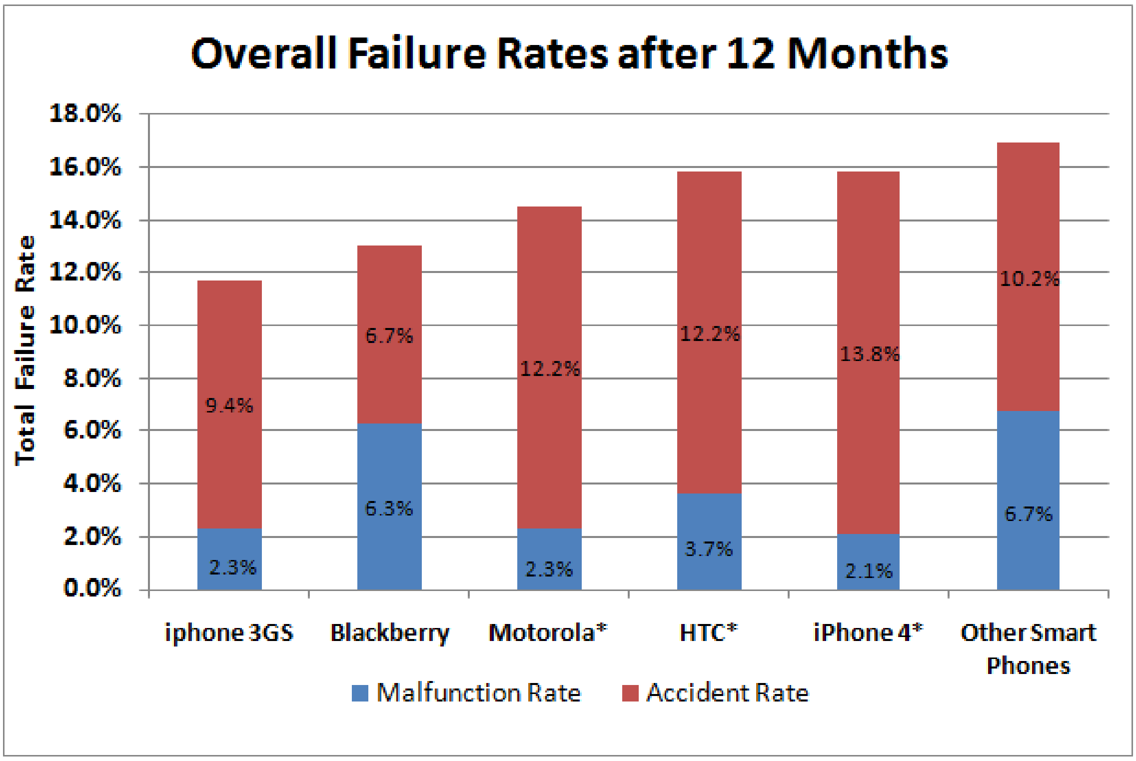
Démontrer ce résultat

Indice :

On pourra dériver la fonction $G \ : t \longmapsto -\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$

6. Exercice : Application de l'espérance de la loi exponentielle

Nous allons voir l'utilité du calcul de l'espérance de la loi exponentielle au travers de l'exemple suivant : Une compagnie vendant des assurances pour smartphones a établi les relevés statistiques suivants :



On y apprend ainsi que l'iPhone 4 possède un taux de défaillance matérielle au bout de 12 mois de 2,1%. Si on y ajoute les pannes liés aux accidents (chutes ...) on arrive a un total de 15,9%.

Sachant que les défaillances (matérielles et accidents cumulés) suivent une loi de probabilité T non soumise au vieillissement, on s'intéresse au temps moyen de fonctionnement (MTBF) d'un iPhone 4, que l'on peut caractériser en mathématique comme l'espérance de la variable aléatoire T.

La question que l'on se pose dans l'activité est de savoir si on a intérêt à souscrire une garantie tous risques de 3 ans pour notre iPhone 4.

Question 1

[Solution n°20 p 56]

Sachant que $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et en utilisant les données du graphique, déterminer la valeur du paramètre λ

Indice :

On sait d'après le graphique que la probabilité que notre iPhone4 soit hors d'usage au bout de 12 mois *ou moins pour cause de défaillance ou accidentelle est de 15,9%*

Question 2

[Solution n°21 p 56]

Calculer l'espérance de la variable aléatoire T.

En déduire le temps moyen en mois avant que notre iPhone4 tombe en panne.

Conclure sur la pertinence de souscrire une assurance 3 ans panne et casse.

Espérance de la loi exponentielle

On retiendra que si $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors l'espérance de T est donnée par la formule

$$\mathbb{E}(t) = \frac{1}{\lambda}$$

Question 3

[Solution n°22 p 56]

Si on exclut à présent les défaillances liées aux causes accidentelles, déterminer le MTBF de l'iphone4 en heures.

On supposera que le temps de bon fonctionnement de l'iPhone4 est une donnée qui n'est pas soumise au vieillissement.

Indices :

On se souvient que l'iPhone 4 possède un taux de défaillance matérielle au bout de 12 mois de 2,1%.

On pourra déterminer le paramètre de la nouvelle variable aléatoire suivant une loi exponentielle de manière analogue à la première question.

7. Exercice : Désintégration d'un atome de Carbone14

La durée de vie d'un atome radioactif de carbone14, exprimée en année, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,00012$. Ce paramètre porte le nom de *constante de désintégration*.

Question 1

[Solution n°23 p 57]

Quelle est la durée de vie moyenne d'un tel atome ?

Question 2

[Solution n°24 p 57]

Quelle est la probabilité qu'un tel atome ne soit pas encore désintégré au bout de 10000 ans ?

Demi-vie radioactive et médiane d'une variable aléatoire

La demi-vie radioactive d'un noyau est la médiane $m_{1/2}$ de la variable aléatoire X que l'on définit par l'égalité

$$\mathbb{P}(X \leqslant m_{1/2}) = \mathbb{P}(X \geqslant m_{1/2}) = \frac{1}{2}$$

Question 3

[Solution n°25 p 57]

Déterminer la demi-vie $m_{1/2}$ d'un atome de Carbone14.

Demi-vie

On pourra retenir que la demi-vie s'exprime en fonction du paramètre λ par la formule

$$m_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Rappels sur la loi binomiale

IV

Dans la vie courante, un grand nombre de situations se traduisent par une répétition d'expériences identiques soumises à un succès ou à un échec. L'étude de ces situations abouti à l'énoncé de la *Loi binomiale* qui permet de modéliser ce type de situations.

1. Loi binomiale

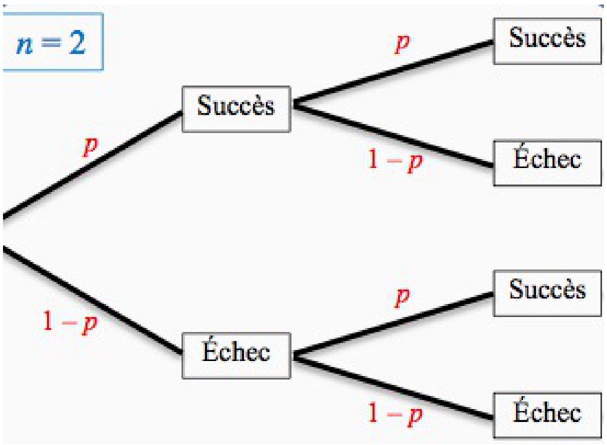
Définition : Loi binomiale

On appelle *Loi binomiale de paramètres n et p*, la loi de probabilité de la variable aléatoire qui associe au schéma de Bernoulli de paramètres n et p le nombre k de succès.

Nb k de succès	0	1	...	n
$P(X = k)$	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	...	$P(X = n)$

La *Loi binomiale de paramètres n et p* est notée $B(n, p)$.

Exemple : Loi binomiale B(2 ;p)



- Pour 0 succès, il n'y a qu'un chemin :
  $P(X = 0) = (1 - p) \times (1 - p) = (1 - p)^2$.
- Pour 1 succès, il y a deux chemins :
  $P(X = 1) = (1 - p) \times p + p \times (1 - p) = 2p(1 - p)$
- Pour 2 succès, il n'y a qu'un chemin :
  $P(X = 2) = p \times p = p^2$

k	0	1	2
$P(X = k)$	$(1 - p)^2$	$2p(1 - p)$	p^2

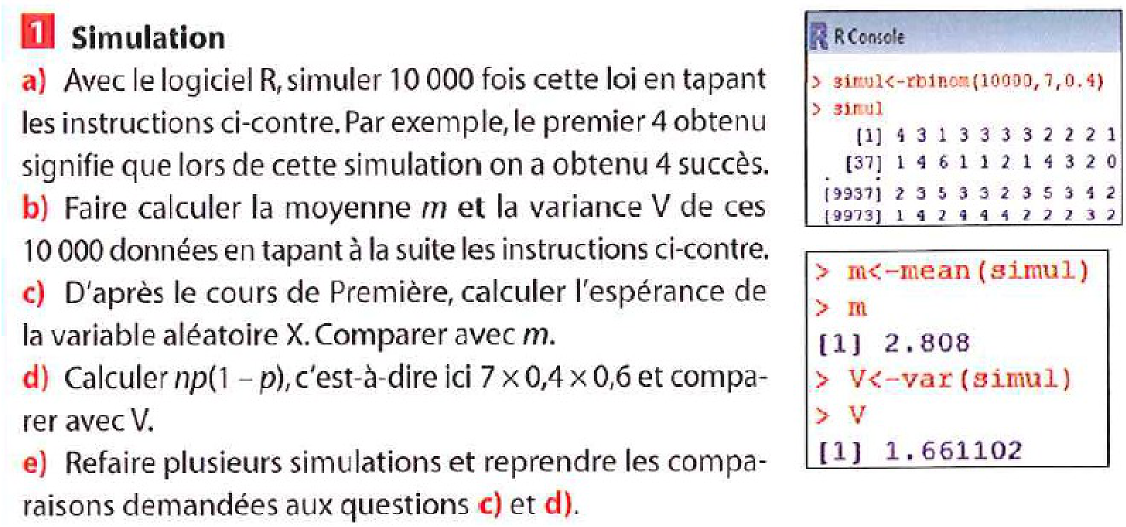
On peut vérifier que

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$

en développant le membre de gauche.

2. Espérance de la loi binomiale

Simulation



1 Simulation

a) Avec le logiciel R, simuler 10 000 fois cette loi en tapant les instructions ci-contre. Par exemple, le premier 4 obtenu signifie que lors de cette simulation on a obtenu 4 succès.

b) Faire calculer la moyenne m et la variance V de ces 10 000 données en tapant à la suite les instructions ci-contre.

c) D'après le cours de Première, calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Comparer avec m.

d) Calculer $np(1 - p)$, c'est-à-dire ici $7 \times 0{,}4 \times 0{,}6$ et comparer avec V.

e) Refaire plusieurs simulations et reprendre les comparaisons demandées aux questions **c)** et **d)**.

```
R Console
> simul<-rbinom(10000,7,0.4)
> simul
    [1] 4 3 1 3 3 3 3 2 2 2 1
   [37] 1 4 6 1 1 2 1 4 3 2 0
 [9937] 2 3 5 3 3 2 3 5 3 4 2
 [9973] 1 4 2 4 4 4 2 2 2 3 2
```

```
> m<-mean(simul)
> m
[1] 2.808
> V<-var(simul)
> V
[1] 1.661102
```

Fondamental : Propriété admise

L'espérance de la loi binomiale $B(n\ ;p)$ est $n \times p$.

Exemple

Une urne contient 80 billes rouges et 20 billes vertes. On prélève cinq fois de suite avec remise une bille de l'urne. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de billes rouges.

La variable X suit la loi binomiale $B(5; 0,8)$. Son espérance est $5 \times 0,8 = 4$. Ceci signifie que si on effectue une grande série de prélèvements de 5 billes (avec remise), on aura une moyenne de 4 billes.

Fondamental : Propriété admise : la variance de la loi binomiale

La variance de la loi binomiale $B(n\ ;\ p)$ est $n \times p \times (1-p)$.

L'écart-type de la loi binomiale $B(n\ ;\ p)$ est $\sqrt{n \times p \times (1-p)}$.

3. Fiches de synthèse

Pour calculer les probabilités P(X=k), on peut aussi utiliser la calculatrice en suivant les documents suivants. Ils sont au format PDF que vous pourrez donc imprimer.

4. Exercice

On lance trois fois un dé tétraédrique équilibré dont les faces portent les numéros 1, 2, 3 et 4.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où le numéro 1 est le numéro de la face contre la table.

Question 1

[Solution n°26 p 57]

Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Indice :

On considère l'épreuve de Bernoulli dont le succès est l'obtention de la face 1 contre la table.

Question 2

[Solution n°27 p 57]

Calculer l'espérance de X

Indice :

Appliquer simplement le résultat du cours

5. Exercice

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,7$.

Question

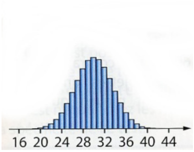
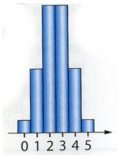
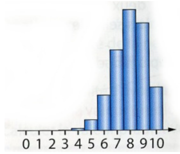
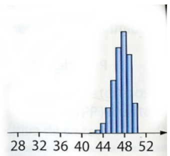
[Solution n°28 p 58]

Afficher avec la calculatrice la loi de probabilité de X.

6. Exercice : Reconnaître une loi binomiale

Associer à chacune de ces lois sa représentation en diagramme en bâtons.

1. $\mathcal{B}(50\ ; 0,95)$
2. $\mathcal{B}(5\ ; 0,5)$
3. $\mathcal{B}(10\ ; 0,8)$
4. $\mathcal{B}(50\ ; 0,6)$

7. Loi binomiale cumulée

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5\,;0,7)$. Utiliser la calculatrice pour calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$.

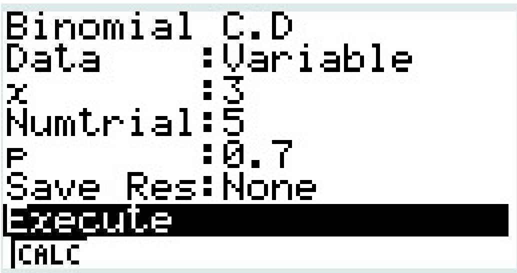
On utilise la fonction "binomiale cumulée". la syntaxe est identique à la fonction "binomiale simple".

Méthode : Sur TI

La fonction s'appelle `binomcf(` et se trouve dans le menu 2nd DISTR A : *binomcdf(*

$\mathbb{P}(X \leqslant 3) \approx 0,47$

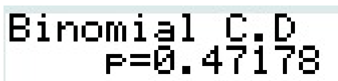
Méthode : Sur Casio



La fonction s'appelle `Bcd` et se trouve dans le menu MENU $STAT2$ puis F5 $DIST$ F5 $BINM$ F1 Bcd

On complète les zones de saisie en indiquant `Data : Variable`

On obtient le résultat sur l'écran ci-contre :



Complément

Pour calculer $\mathbb{P}(3 \leqslant X \leqslant 4)$ on peut calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 4) - \mathbb{P}(X \leqslant 2)$.

En effet l'événement $(X = 3)$ doit être compris dans le calcul. Il ne faut donc pas le retrancher.

Ici on voit que :
$\mathbb{P}(3 \leqslant X \leqslant 4) \approx 0,67$

8. Ecart type d'une loi binomiale

Fondamental : Propriété admise

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ une variable aléatoire discrète suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

Alors l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X est donné par la formule $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

* *

*

Petite vidéo récapitulant une utilisation de la loi binomiale.

Loi normale centrée réduite

Tous les phénomènes naturels n'obéissent pas à la loi uniforme. Bien au contraire, on a rencontré au cours des situations étudiées en première et terminale nombre de cas faisant apparaître une répartition "en cloche". Cette situation est en réalité tellement fréquente dans la nature que les premiers scientifiques à s'intéresser aux statistiques l'ont qualifiée de "Normale". Ce qualificatif est resté et a donné son nom à cette loi fondamentale de la nature.

1. Première approche par la Loi Binomiale

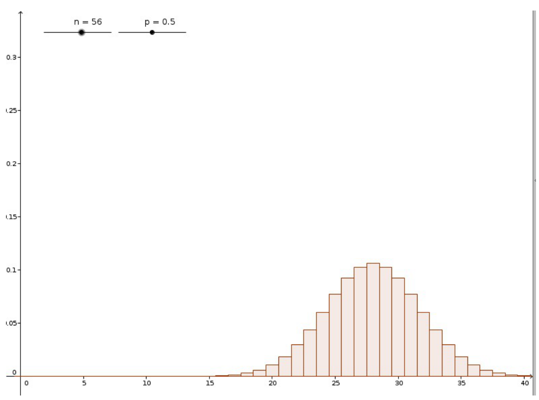
On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p :

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n\,;p)$

On se *rappelle* - *p.45* que son espérance est $\mathbb{E}(X) = n \times p$. On notera cette espérance $\mu_X = n\,p$

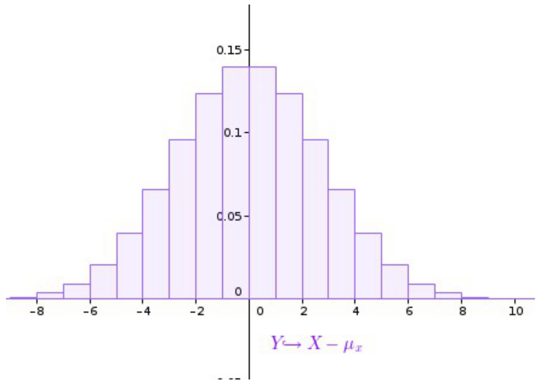
On admettra également le résultat suivant : *L'écart type* d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ est $\sigma_x = \sqrt{np(1-p)}$.

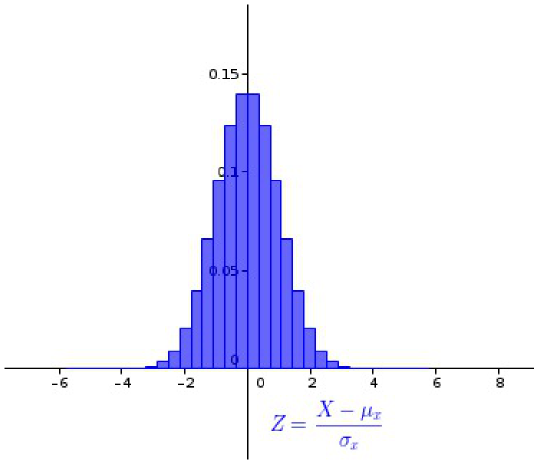
Simulation



En observant cette simulation geogebra, on constate que lorsque n varie, l'histogramme représentant la loi binomiale se déplace du fait que l'abscisse du sommet de la cloche valant approximativement son espérance, augmente avec n. Cela est très gênant car nous allons tenter de passer du discret au continu et pour ce faire, répéter un grand nombre de fois l'expérience aléatoire en faisant tendre n vers l'infini, donc la cloche va s'éloigner vers la droite.

Pour contourner cette difficulté, nous allons *centrer* la variable aléatoire X en créant une nouvelle variable aléatoire $Y = X - \mu_x$ obtenue en retranchant à X son espérance $\mu_X = \mathbb{E}(X)$.



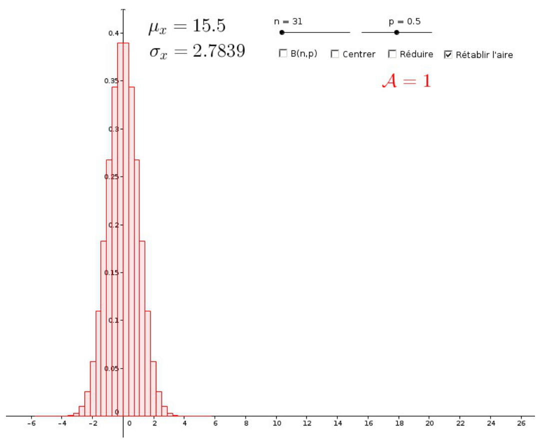


A présent, on constate que lorsque n augmente, la position du graphique reste centrée mais s'étale de plus en plus. Cela est du à l'écart type $\sigma_x = \sqrt{np(1-p)}$ qui augmente avec n. L'idée pour normaliser la largeur du graphique va être de diviser Y par l'écart type et ainsi créer une nouvelle variable aléatoire Z définie par $Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$.

La nouvelle variable Z est nommé variable centrée réduite :

Son espérance vaut 0 et son écart-type vaut 1. cf act p 193

Hélas en faisant cette opération l'aire totale des rectangles a été modifiée car la largeur divisée par σ_x. Afin de retrouver une aire totale de 1 et ainsi nécessaire pour obtenir une loi de probabilité, nous allons devoir multiplier la hauteur des rectangles par σ_x afin de compenser la diminution de largeur. Nous obtenons ainsi l'histogramme rouge dont l'aire vaut 1 et qui est centré et réduit autour de l'origine.



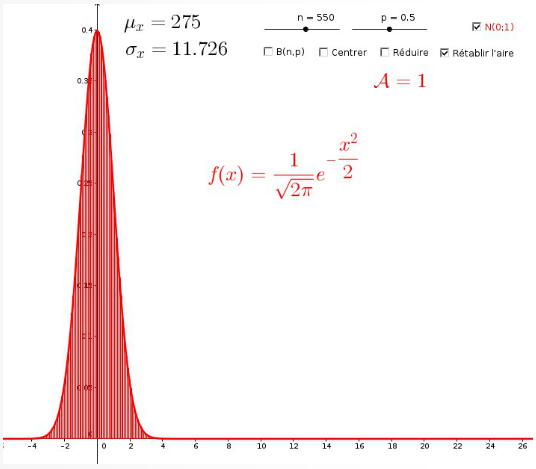
Vous pouvez reproduire les différentes étapes amenant à cette construction à laide de la simulation suivante. Faites ensuite l'expérience d'augmenter la valeur de n afin de simuler le passage d'une loi discrète à une loi continue.

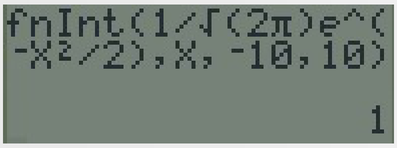
Fondamental : Du discret au continu

Lorsque n devient grand, notre loi binomiale centrée réduite et normalisée forme une *courbe en cloche* qui **coïncide avec la fonction**

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ce résultat a été découvert par le mathématicien français Abraham de Moivre (1667, Vitry-le-François – 1754, Londres) :





L'aire sous cette courbe est égale à 1 car nous avons construit l'histogramme rouge de manière à conserver une aire totale de 1. Nous pouvons utiliser la fonction intégrale de la calculatrice pour vérifier ce résultat.

Attention

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ admet des primitives mais il est **impossible de les exprimer explicitement au moyen des fonctions usuelles**. Nous avons donc recours pour calculer les intégrales à des **méthodes de calcul numérique approché**.

L'aire sous la courbe est très très faible pour des valeurs de **x** grandes car la courbe s'écrase sur l'axe des abscisses. Nous obtenons donc une approximation de l'aire **totale** sous la courbe en utilisant une intégrale sur l'intervalle **[-10 ;10]** car la calculatrice ne sait pas calculer jusqu'à l'infini.

Définition : Gaussienne

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est appelée **fonction de gauss**, du nom du mathématicien qui l'a découverte.

2. Exercice : Application au calcul des grandes binomiales

On considère une variable aléatoire *X* suivant une loi binomiale de paramètres *100* et *0,5* : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100\,;0.5)$

On s'intéresse à $\mathbb{P}(45 < X \leqslant 55)$.

Question 1

[Solution n°29 p 59]

Calculer l'espérance μ_x et l'écart type σ_x de X.

Question 2

[Solution n°30 p 59]

On définit la variable aléatoire Z centrée réduite de X par $Z = \dfrac{X - \mu_x}{\sigma_x}$.

Expliquer pourquoi $\mathbb{P}(45 < X \leqslant 55) = \mathbb{P}(-1 < Z \leqslant 1)$

Indice :

Si X prend ses valeurs entre 45 et 55, entre quels nombres Z prendra t-il ses valeurs ?

Question 3

[Solution n°31 p 60]

Expliquer pourquoi $\mathbb{P}(45 < X \leqslant 55)$ peut être approchée par $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

Indice :

On remarquera que 100 est un nombre assez grand...

Question 4

[Solution n°32 p 61]

Calculer à la calculatrice

- $\mathbb{P}(45 < X \leqslant 55)$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

et donner une estimation de l'erreur commise par l'approximation de la loi binomiale par l'intégrale.

Indice :

On révisera l'utilisation de la calculatrice pour la loi binomiale - p.47 et pour le calcul des intégrales - p.49.

$\mathbb{P}(45 < X \leqslant 55) = \mathbb{P}(X \leqslant 55) - \mathbb{P}(X \leqslant 45)$

Conclusion

Par conséquent on considère que pour les grandes binomiales, l'intégrale de la courbe de Gauss fournir une assez bonne approximation de la loi binomiale.

Ce résultat est dû à Abraham de Moivre qui fait apparaître pour la première fois en 1756 la loi normale comme limite d'une loi binomiale.

3. Loi normale centrée réduite

Définition

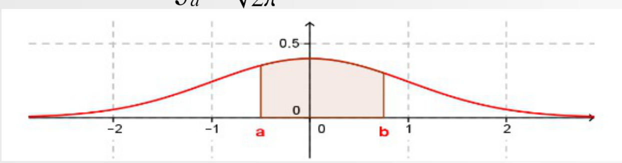
Dire qu'une variable aléatoire continue X suit la *loi normale centrée réduite* signifie que sa densité de probabilité est la fonction de Gauss f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

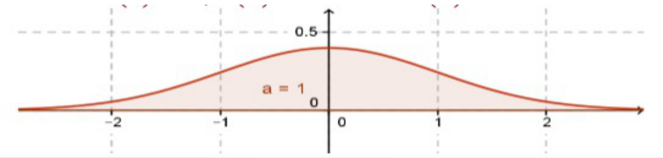
On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0\,;1)$.

Fondamental : Propriétés

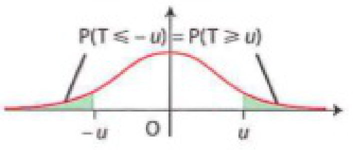
1. $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

   De plus : $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X < b)$
2. $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$ d'où la dénomination centrée et réduite...
3. L'aire totale sous la courbe est égale à 1. Elle représente la probabilité $\mathbb{P}(-\infty < X < +\infty)$ de l'événement certain.



4. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc :
   - $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = \dfrac{1}{2}$
   - $\mathbb{P}(X \geqslant u) = \mathbb{P}(X \leqslant -u)$ pour tout réel $u \in \mathbb{R}$



Complément : Démonstration de l'espérance nulle

La fonction $t \cdot f(t)$ admet pour primitive $-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

Donc $\displaystyle\int_0^x t \cdot f(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$

Par conséquent $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \cdot f(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

On montre de même que $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \int_{-y}^0 t \cdot f(t)\, dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Ainsi $\mathbb{E}(X) = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$

On admettra que l'écart type de X est égal à 1.

4. Exercice : Calculer avec la loi normale

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite :

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0\,;1)$

Question 1

[Solution n°33 p 62]

Calculer $\mathbb{P}(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96)$.

Ce résultat **sera à retenir**.

Indice :

On pourra utiliser la fonction intégrale de la calculatrice ou la fonction "loi normale".

Question 2

[Solution n°34 p 63]

Calculer$\mathbb{P}(X \leqslant 1)$.

Indice :

Ne pouvant mettre $-\infty$ comme borne inférieure, on pourra remarquer que grâce à la relation de Chasles, $\mathbb{P}(X \leqslant 1) = \mathbb{P}(X \leqslant 0) + \mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 1)$

Question 3

[Solution n°35 p 63]

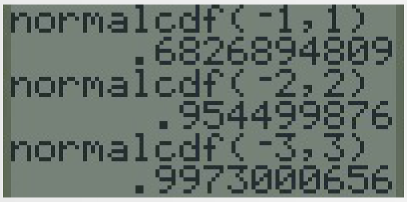
Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 0,5)$.

Indice :

Ne pouvant indiquer $+\infty$ *comme borne supérieure, on remarquera que* $\mathbb{P}(X \geqslant 0,5) = \mathbb{P}(X \geqslant 0) - \mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 0,5)$.

5. Intervalles particuliers

Fondamental



Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0\,;1)$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient :

- $\mathbb{P}(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0,68$
- $\mathbb{P}(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$
- $\mathbb{P}(-2 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0,954$
- $\mathbb{P}(-3 \leqslant X \leqslant 3) \approx 0,997$

6. Exercice : ROC : Existence de u alpha

Théorème

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0\,;1)$

Alors pour tout réel $\alpha \in]0\,;1[$**, il existe un unique réel positif** u_α **tel que**

$\mathbb{P}(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$

Question

[Solution n°36 p 64]

Démontrer ce résultat.

Indice :

On pourra étudier la fonction $H(x) = \mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x)$.

7. Calcul de u alpha à la calculatrice

Simulation

La simulation suivante montre graphiquement l'influence de la modification du paramètre α sur la détermination de u_α

On s'intéressera à la probabilité $\mathbb{P}(X \leqslant u_\alpha)$: On comprend sur le graphique que l'on a bien

$\mathbb{P}(X \leqslant u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

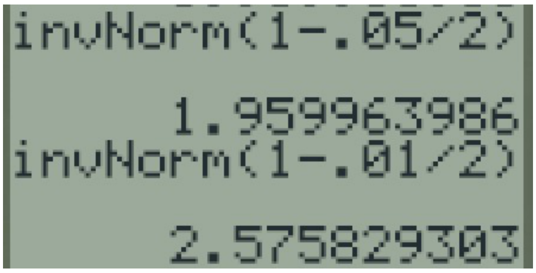
Méthode : Détermination de u alpha à la calculatrice

La fonction `InvNorm`(p) de la calculatrice retourne le nombre x tel que $\mathbb{P}(X \leqslant x) = p$

Étant donné α, on calcule $p = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

Puis la calculatrice nous donne u_α par la fonction `InvNorm`(p)

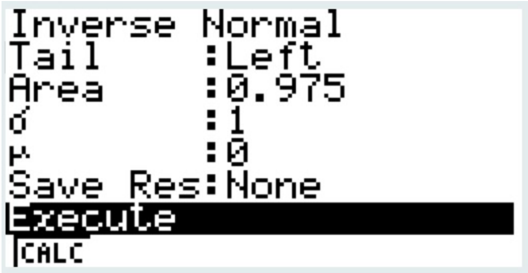
Calcul sur TI.



La fonction `invNorm` se trouve dans le menu [2nde] [distrib]

Calcul sur Casio

La fonction `iNorm` se trouve dans le menu **stats** sous [DIST] [F3] `iNorm`



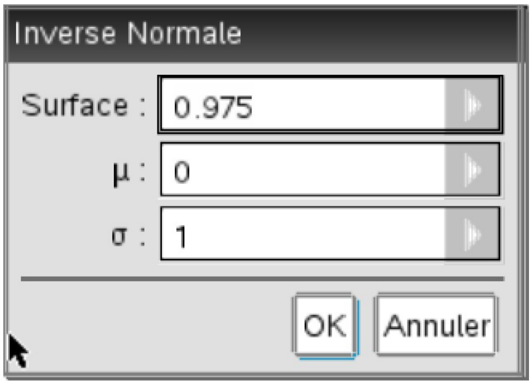
Pour appliquer la même méthode que sur TI, on positionne la queue *tail* sur left.

On pourrait obtenir le même résultat (ici 

) en

- positionnant Tail sur Center et plaçant 0,95 pour Area
- positionnant Tail sur Right et plaçant 0,275 pour Area

Un examen de la simulation géogébra est parlant par rapport à ces données. A chacun de déterminer sa méthode préférée, mais attention de bien vérifier la position du champ Tail par rapport aux données que vous introduisez ! ! !



Calcul sur nSpire

La fonction Inverse Normale se trouve dans le

[Menu] `5 :Probabilités 5 : Distributio Inverse Normale`

On paramétrera les champs de saisie comme ci-contre.

On peut également taper directement la commande

Fondamental

On retiendra les deux valeurs suivantes :

- $u_{0,05} \approx 1,96$
- $u_{0,01} \approx 2,58$

La loi normale

1. Loi normale

Définition

Dire qu'une variable aléatoire continue X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ signifie que la variable aléatoire continue $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$.

Fondamental : Espérance et écart-type

Si une v.a. X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$, alors l'espérance de X vaut $E(X) = \mu$ et sa variance vaut $V(x) = \sigma^2$ et son écart-type $\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2}$.

Attention

Lorsqu'on écrit qu'une v.a X suit une loi normale $\mathcal{N}(40\,;5)$, cela signifie que la valeur moyenne (espérance) de X vaut $E(X) = 40$ et 5 désigne sa variance, donc $\sigma(X) = \sqrt{5}$.

Complément

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ la fonction densité associée à X est :

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La connaissance de cette fonction n'est pas un attendu du programme.

Méthode : Utilisation de la calculatrice pour calculer P(a<X<b)

Pour casio et TI cf *ici [PDF]*

Exemple : Poids à la naissance

La masse en kg des nouveaux nés à la naissance est une variable aléatoire qui peut être modélisée par une loi normale de moyenne $\mu = 3{,}3$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}5$. Calculer la probabilité qu'un nouveau né pèse moins de 2,5 kg à la naissance.

Résolution :

méthode 1 :

La probabilité qu'un nouveau né pèse moins de 2,5 kg à la naissance est donc : $P(X < 2,5)$.

La variable $Z = \dfrac{X - 3,3}{0.5}$ suit la *loi normale centrée réduite* : $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0\,;1)$

On a alors $P(X < 2,5) = P(X - 3,3 < 2,5 - 3,3) = P\left(\frac{X - 3,3}{0,5} < \frac{2,5 - 3,3}{0,5}\right)$

Ce qui donne $P(X < 2,5) = P(Z < -1,6)$.

On peut calculer cette valeur de deux façons :

1. $P(Z < -1,6) = \frac{1 - P(-1,6 < Z < 1,6)}{2}$:
2. En utilisant l'astuce consistant à remplacer $-\infty$ par -10^99 avec la calculatrice.

La probabilité cherchée est donc égale à 0,055 à 10^{-3}– près.

méthode 2 :

La calculatrice permet aussi directement de calculer $P(X < 2,5)$!

Simulation : Influence des paramètres et intervalles "un, deux et trois sigma"

De manière analogue à la loi normale centrée réduite, on constate que :

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$
- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,956$
- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

Remarque

Par conséquent, cela signifie que la probabilité d'avoir une valeur de X distante de plus de 3σ de l'espérance μ est **pratiquement nulle**.

2. Exercice

Les températures du mois de juillet autour du lac Léman suivent la loi normale d'espérance 18,2°C et d'écart type 3,6°C.

Une personne part camper en juillet sur le pourtour du lac.

Question

[Solution n°37 p 64]

Calculer la probabilité que la température :

1. soit inférieure à 16°C
2. soit comprise entre 20°C et 24,5°C
3. soit supérieure à 21°C

3. Exercice : loi normale inverse

Soit X une v.a continue qui suit une loi normale $\mathcal{N}(10\,;0,8^2)$. Déterminer une valeur approchée de t au centième telle que :

Question

[Solution n°38 p 65]

1. $P(X \leq t) = 0,95$
2. $P(X \geq t) = 0,85$

Indice :

On utilise la fonction loi normale inverse de la calculatrice.

4. Exercice : Calculer une espérance

Lors d'un test de connaissances, 70% des individus ont un score inférieur à 60 points.

De plus, les résultats suivent une loi normale d'écart-type 20.

Question

[Solution n°39 p 65]

Calculer l'espérance de cette loi.

Indices :

On pourra essayer de se ramener à une loi centrée réduite en posant $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

On sait que $\mathbb{P}(X \leqslant 60) = 0,70$.

On utilisera la fonction Inverse Normal de la calculatrice pour trouver le nombre s *tel que* $\mathbb{P}(Z \leqslant s) = 0,70$.

Tester ses connaissances

VII

Pour ce test d'auto-évaluation final, vous devez obtenir un minimum de 80% de bonnes réponses. En cas d'échec, révisez la section du cours qui vous a posé des difficultés et retentez à nouveau le test.

Exercice 1

Laquelle des fonctions f données ci-dessous est une fonction de densité sur [1 ;e] ?

- $f(x) = \dfrac{x}{e}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Exercice 2

Si la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle [1 ;10], alors :

- La fonction de densité de X est $f(x) = \dfrac{1}{10}$
- $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = \dfrac{1}{3}$
- $E(X) = 5$

Exercice 3

On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle [14 ;20].

La probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 15 est :

- $\dfrac{5}{6}$
- $\dfrac{6}{5}$
- $\dfrac{1}{6}$

Exercice 4 : Loi exponentielle

La durée de vie, exprimé en heures, d'un composant implanté dans un appareil électroménager jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisé par la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,002$

Exercice 5

La probabilité qu'un tel composant tombe en panne avant l'instant t est :

- ☐ $1 - e^{-0{,}002t}$
- ☐ $0,002\, e^{-0{,}002t}$
- ☐ $e^{-0{,}002t}$
- ☐ $e^{-t/500}$

Exercice 6

La probabilité qu'un tel composant ait une durée de vie supérieure à 1000 heures est :

- ☐ $1 - e^{-2}$
- ☐ $1 - 0,002\, e^{-2}$
- ☐ $0,002\, e^{-2}$
- ☐ e^{-2}

Exercice 7

La durée de vie moyenne d'un tel composant, exprimée en heure, est :

- ☐ 50
- ☐ 250
- ☐ 500
- ☐ 2500

Exercice 8

La fonction densité de la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ est :

- ○ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
- ○ $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{2\sqrt{2\pi}}$
- ○ $f(x) = \sqrt{2\pi}\, e^{-x^2}$

Exercice 9

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. Alors :

- ○ $P(X \geqslant 1) = P(X \leqslant 1)$
- ○ $P(-3 \leqslant X \leqslant 1) = 1 - P(X \geqslant 1)$
- ○ $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 1 - 2P(X \leqslant -1)$

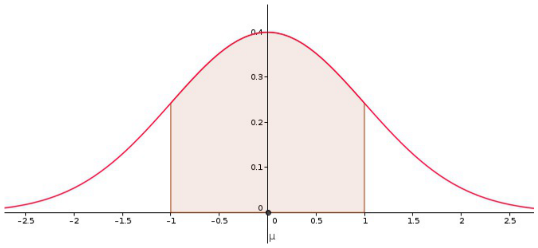
Exercice 10

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$*. Alors :*

- $P(X \leqslant -3) = 0$
- $P(X \leqslant -1) \approx 0,16$
- $P(X = 0) = 0,4$

Exercice 11

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$*. Alors l'aire coloriée en marron, en unité d'aire, est égale à :*



- 0,5
- $P(X \leqslant -1) - P(X \leqslant 1)$
- $1 - 2P(X \geqslant 1)$

Exercice 12 : Calcul de u alpha

Donner la valeur de $u_{0,02}$*, arrondie à* 10^{-2} *près*

Exercice 13

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$*. Alors :*

- $P(X \in [\mu - \sigma\,;\mu + \sigma]) \approx 0,683$
- $P(X \in [\mu - 3\sigma\,;\mu + 3\sigma]) \approx 0,95$
- $P(X \in [\mu - 2\sigma\,;\mu + 2\sigma]) \approx 0,095$

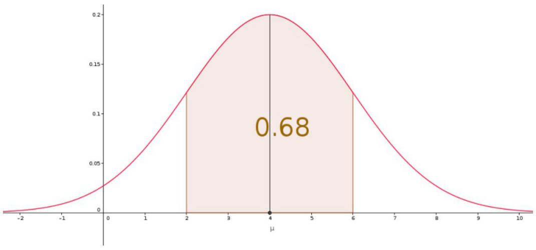
Exercice 14

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(16;4)$*. Alors :*

- $P(X \leqslant 20) \approx 0,841$
- $P(12 \leqslant X \leqslant 20) \approx 0,682$
- $P(X \leqslant 20) \approx 0,977$

Exercice 15

La variable aléatoire X *suit la loi normale* $\mathcal{N}(4\,;\sigma^2)$.
On a représenté ci-contre la probabilité $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 6)$.
Alors :



- $\sigma = 4$
- $\sigma = 2$
- $\sigma = 1$

Contenus annexes

> Activité d'approche : Du discret au continu

Rappel : Variable aléatoire discrète et loi de probabilité

Une variable aléatoire *discrète* ne peut prendre qu'un nombre fini de valeur réelles.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire est le tableau donnant toutes les valeurs k possibles prises par cette variable aléatoire et leur probabilité associée $\mathbb{P}(X = k)$.

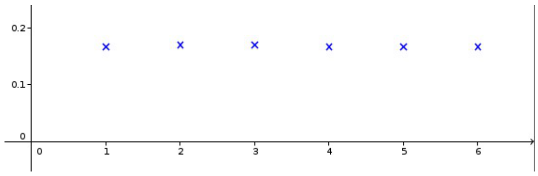
Exemple : Un dé à 6 faces

On lance un dé bien équilibré et on note X le numéro de la face obtenue. La variable aléatoire X peut prendre toutes les valeurs entières 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

La loi de probabilité associée se résume dans le tableau

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Graphiquement, on peut représenter cette loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X par un nuage de points isolés dont la somme des ordonnées vaut 1.



Exemple : Un nombre aléatoire entre 0 et 6

Supposons à présent que l'on fabrique avec un tableur (ou la calculatrice) un nombre réel aléatoire entre 0 et 6 (au moyen de la fonction =ALEA()*6 par exemple). Le nombre résultant de cette expérience constitue une variable aléatoire Y qui peut prendre **toutes les valeurs entre 0 et 6**.

La variable aléatoire Y est dite *continue*, par opposition à la variable aléatoire *discrète* X.

On peut se demander quelle est la probabilité que Y prenne une valeur comprise entre 0 et 3 ?

Intuitivement, on voit que plus l'intervalle cible est large, plus cette probabilité sera importante.

Ici, la largeur de l'intervalle cible est la moitié de l'intervalle contenant toutes les valeurs possibles de notre nombre aléatoire. On se dit donc qu'il y a une chance sur 2 pour que le nombre aléatoire se trouve entre 0 et 3, ce que l'on peut écrire $\mathbb{P}(0 \leqslant Y \leqslant 3) = \frac{1}{2}$

On peut de même comprendre que $\mathbb{P}(1 \leqslant Y \leqslant 4) = \frac{1}{2}$ également puisque l'intervalle $[1\,;4]$ a la même largeur que l'intervalle $[0\,;3]$ et que nos nombres aléatoires sont uniformément répartis sur l'intervalle $[0\,;6]$

Maintenant si on considère que l'intervalle cible possède une largeur égale au sixième de l'intervalle $[0\,;6]$ (comme par exemple $[1\,;2]$ ou $[4,5\,;5,5]$) on peut prévoir une probabilité que

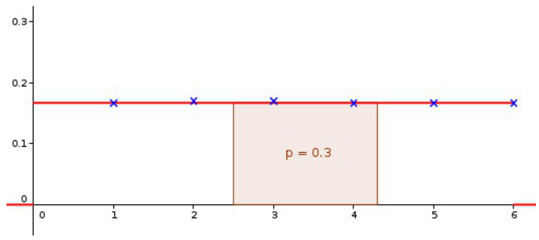
Y soit dans cet intervalle égale à $\dfrac{1}{6}$.

Et en généralisant cela, on peut dire que si $a, b \in [0\,;6]$ $\mathbb{P}(a \leqslant Y \leqslant b) = \dfrac{b-a}{6}$

On vérifie alors que la probabilité que le nombre aléatoire soit compris entre 0 et 6 se calcule par :

$\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 6) = \dfrac{6-0}{6} = 1$

Ce qui est conforme à ce que l'on attend puisqu'il s'agit ici de la probabilité de l'événement certain.

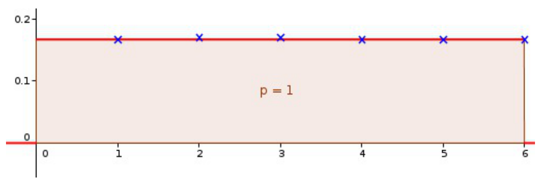


Si on interprète graphiquement cette expérien on peut s'appuyer sur la fonction constant $f(x) = \dfrac{1}{6}$ sur l'intervalle $[0\,;6]$. La probabilité qu nombre aléatoire compris entre 0 et 6 soit comp entre 2,5 et 4,3 correspond à l'aire du doma délimité par les droites $x = 2,5$ et $x = 4,3$ d'u part, l'axe des abscisses et la fonction f d'au part. En d'autres termes, on a :

$\mathbb{P}(2,5 \leq Y \leq 4,3) = \displaystyle\int_{2,5}^{4,3} f(x)\,dx = \frac{1}{6}(4,3-2,5) =$

La fonction f n'a pas été choisie n'importe comment. Elle doit vérifier pour être cohérente avec notre expérience :

$\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx = 1$ puisque toutes les valeurs de Y sont entre 0 et 6.



Complément : Une conséquence étonnante des lois continues

Dans l'exemple précédent, considérons des intervalles de largeur de plus en plus petite : par exemple $I_n = \left[2 - \dfrac{1}{n}\,;2 + \dfrac{1}{n}\right]$

La formule précédente nous montre que $\mathbb{P}(Y \in I_n) = \dfrac{2/n}{6} = \dfrac{2}{6n}$

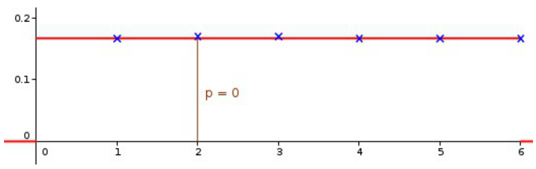
Lorsque n devient grand :

- l'événement $(Y \in I_n)$ se "rapproche" de l'événement $Y = 2$ puisque $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 : l'amplitude de l'intervalle I_n tend vers 0,
- la probabilité $\dfrac{2}{6n}$ de cet événement tend vers 0.

On peut donc en conclure que $\mathbb{P}(Y = 2) = 0$! !

Le passage au continu possède donc une conséquence surprenante :

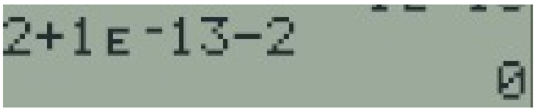
La probabilité d'un nombre en particulier, par exemple la probabilité d'obtenir 2 exactement, **est égale à 0** car il y a une infinité de nombres possibles et un seul réalise l'événement $(Y = 2)$. On a ainsi $\mathbb{P}(Y = 2) = 0$



On peut aussi justifier ce résultat par :

$\mathbb{P}(Y = 2) = \displaystyle\int_2^2 f(x)\,dx = \frac{1}{6}(2-2) = 0$

Remarque : De la difficulté de simuler une loi continue avec une machine



Par conséquent, il est impossible de deviner à l'avance le nombre exact qui sera pris par la variable aléatoire Y.

Si Y est simulée à l'aide d'une calculatrice, on peut obtenir un résultat un peu différent dans la mesure où la calculatrice ne possède pas une précision de calcul infinie comme le montre cette capture effectuée sur une TI83.

Ainsi pour la TI, dans les calculs, tout nombre dans l'intervalle $\left[2-10^{-13}\,;2+10^{-13}\right]$ sera assimilé à 2.

Pour la calculatrice, les événements $Y=2$ et $Y \in \left[2-10^{-13}\,;2+10^{-13}\right]$ sont indiscernables du fait de la précision de calcul.

Pour le mathématicien par contre, $\mathbb{P}(Y=2)=0$ mais $P\left(Y \in \left[2-10^{-13}\,;2+10^{-13}\right]\right) = \dfrac{2 \cdot 10^{-13}}{6} \neq 0$

Il est donc **possible** de deviner la valeur prise par Y lorsque celle-ci est simulée par la calculatrice, mais avec une probabilité très faible...

La calculatrice - ou les ordinateurs - ne vont donc pas simuler des variables aléatoires continues mais des variables aléatoires discrètes prenant beaucoup de valeurs possibles et se rapprochant donc ainsi du continu, sans toutefois atteindre la perfection.

Dans la suite, on supposera que les simulations effectuées avec la fonction ALEA() ou Random simulent une loi continue.

> Activité de découverte

On considère dans cette activité la fonction f définie sur [0 ;2] par $f(x)=4-x^2$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

L'objectif de cette activité est de déterminer l'aire comprise entre la courbe C et l'axe des abscisses. Pour cela, on aura recours à la simulation géogébra suivante :

Simulation

Pour approcher l'aire sous la courbe, on l'encadre à l'aide de rectangles : une série situés à l'intérieur de la courbe et une autre à l'extérieur. La somme des aires de ces rectangles permet de connaître un encadrement de l'aire sous la courbe comme le montre l'animation suivante :

On s'aperçoit que plus le nombre de rectangles est grand, plus l'encadrement de l'aire obtenu est précis. On obtient ainsi avec 250 rectangles une aire comprise entre 5,32 et 5,35 unités d'aire.

> Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition : Espérance

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité P est donnée par le tableau :

x_i	x_1	x_2	x_3	.....	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	.....	p_n

On appelle *espérance mathématique* de X le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)\, x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + ... + p_nx_n$$

Exemple : Reprenons l'exemple précédent...

La loi de probabilité de la variable aléatoire X était donnée par le tableau :

x_i	-2	0,5	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

L'espérance se calcule alors ainsi :

$$E(X) = \frac{1}{3} \times (-2) + \frac{1}{6} \times 0,5 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{-4}{6} + \frac{0,5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{-0,5}{6} = \frac{-1}{12}$$

Concrètement, elle signifie que si on joue un très grand nombre de fois à ce jeu, en moyenne, on perd $\frac{1}{12}$ d'euro par partie.

Complément : Interprétation

Pour une expérience donnée dans le modèle défini par une loi de probabilité d'une variable aléatoire X, la moyenne des résultats obtenus sur des séries de taille *N* se rapproche de l'espérance mathématique lorsque *N* devient grand, c'est à dire que si on renouvelle un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, la moyenne des résultats obtenus se rapproche de l'espérance mathématique.

L'espérance mathématique peut s'interpréter comme la valeur moyenne que l'on peut espérer obtenir par la variable aléatoire lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience.

Dans l'exemple précédent, l'espérance mathématique est négative. On peut donc penser que le joueur qui répétera le jeu un grand nombre de fois sera perdant en fin de compte.

Définition

Pour la variable aléatoire X définie ci-dessus, on appelle **variance** de X le nombre réel positif suivant :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)\ (x_i - E(X))^2 \\ &= p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + p_3(x_3 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2 \end{aligned}$$

L'écart-type de X est le nombre noté $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.

Exemple : Reprenons encore une fois l'exemple précédent...

La variance se calcule ainsi :

$$Var(X) = \frac{1}{3} \times \left(-2 - \left(-\frac{1}{12}\right)\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(0.5 - \left(-\frac{1}{12}\right)\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(-\frac{1}{12}\right)\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{-23}{12}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{7}{12}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2 = \frac{269}{144}.$$

Et donc :

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{269}{144}} = \frac{\sqrt{269}}{12}.$$

Utilisation de la calculatrice pour le calcul de l'écart-type :

Il suffit d'utiliser le mode statistique, comme on l'a vu précédemment : cf - *p.48casio - p.47* et *ti - p.47*.

> Espérance de la loi binomiale

Simulation

1 Simulation

a) Avec le logiciel R, simuler 10 000 fois cette loi en tapant les instructions ci-contre. Par exemple, le premier 4 obtenu signifie que lors de cette simulation on a obtenu 4 succès.

b) Faire calculer la moyenne m et la variance V de ces 10 000 données en tapant à la suite les instructions ci-contre.

c) D'après le cours de Première, calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Comparer avec m.

d) Calculer $np(1-p)$, c'est-à-dire ici $7 \times 0{,}4 \times 0{,}6$ et comparer avec V.

e) Refaire plusieurs simulations et reprendre les comparaisons demandées aux questions **c)** et **d)**.

R Console

```
> simul<-rbinom(10000,7,0.4)
> simul
    [1] 4 3 1 3 3 3 3 2 2 2 1
   [37] 1 4 6 1 1 2 1 4 3 2 0
 .    .
 [9937] 2 3 5 3 3 2 3 5 3 4 2
 [9973] 1 4 2 4 4 4 2 2 2 3 2
```

```
> m<-mean(simul)
> m
[1] 2.808
> V<-var(simul)
> V
[1] 1.661102
```

Fondamental : Propriété admise

L'espérance de la loi binomiale $B(n\,;p)$ est $n \times p$.

Exemple

Une urne contient 80 billes rouges et 20 billes vertes. On prélève cinq fois de suite avec remise une bille de l'urne. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de billes rouges.

La variable X suit la loi binomiale $B(5;0,8)$. Son espérance est $5 \times 0,8 = 4$. Ceci signifie que si on effectue une grande série de prélèvements de 5 billes (avec remise), on aura une moyenne de 4 billes.

Fondamental : Propriété admise : la variance de la loi binomiale

La variance de la loi binomiale $B(n\,;p)$ est $n \times p \times (1-p)$.

L'écart-type de la loi binomiale $B(n\,;p)$ est $\sqrt{n \times p \times (1-p)}$.

> Existence de primitives

Peut-on toujours calculer une primitive ? Sous quelles conditions existent-elles ? La propriété suivante fixe un premier critère très simple.

Fondamental : Primitive d'une fonction continue (admis dans le cas général)

Toute fonction **continue** sur un intervalle **admet des primitives** sur cet intervalle.

Complément : Démonstration ROC

La démonstration de ce théorème fondamental sur un intervalle [a ;b] fait l'objet d'une ROC.

Attention

Même si on est assuré dans le cas d'une fonction continue de l'existence d'une primitive, nous ne sommes pas toujours en capacité de l'expliciter à l'aide des fonctions usuelles que nous connaissons. Pour certaines fonctions, même parfois simples, nous n'avons pas possibilité de donner une primitive à l'aide de nos fonctions usuelles.

Exemple : $x \longmapsto e^{-x^2}$ admet des primitives mais nous ne pouvons les expliciter au moyen des fonctions usuelles que nous connaissons.

Contrairement au processus de dérivation qui permet toujours d'obtenir la dérivée d'une fonction lorsqu'elle existe, le calcul de primitive est moins évident et n'aboutit pas toujours à un résultat.

> Exploitation des données sur Casio

> Exploitation des données sur TI

> La fonction exponentielle

Fondamental : Existence et unicité de la fonction exponentielle

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f' = f$
- $f(0) = 1$

Cette fonction est appelée *fonction exponentielle* et est notée *exp*

Complément

La démonstration de l’existence d'une telle fonction est admise. Néanmoins l'activité précédente nous permet de conjecturer l’existence d'une telle fonction en nous permettant de la construire pas à pas

L'unicité d'une telle fonction fait l'objet d'une ROC :)

> Loi binomiale cumulée

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5\,;0,7)$. Utiliser la calculatrice pour calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$.

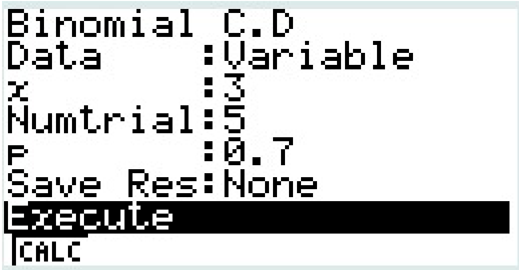
On utilise la fonction "binomiale cumulée". la syntaxe est identique à la fonction "binomiale simple".

Méthode : Sur TI

La fonction s'appelle `binomcf(` et se trouve dans le menu $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{DISTR}}$ A : $binomcdf($

$\mathbb{P}(X \leqslant 3) \approx 0,47$

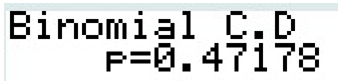
Méthode : Sur Casio



La fonction s'appelle `Bcd` et se trouve dans le menu $\boxed{\text{MENU}}$ *STAT2* puis $\boxed{\text{F5}}$ *DIST* $\boxed{\text{F5}}$ *BINM* $\boxed{\text{F1}}$ *Bcd*

On complète les zones de saisie en indiquant `Data : Variable`

On obtient le résultat sur l'écran ci-contre :



Complément

Pour calculer $\mathbb{P}(3 \leqslant X \leqslant 4)$ on peut calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 4) - \mathbb{P}(X \leqslant 2)$.

En effet l'événement $(X = 3)$ doit être compris dans le calcul. Il ne faut donc pas le retrancher.

Ici on voit que :
$\mathbb{P}(3 \leqslant X \leqslant 4) \approx 0,67$

> Saisie des données statistiques sur la calculatrice Casio

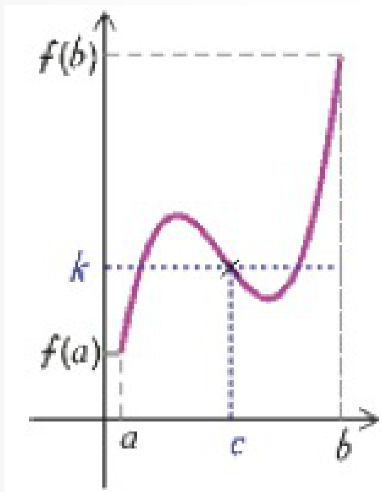
> Théorème des valeurs intermédiaires

Fondamental : Théorème des valeurs intermédiaires (TVI). Propriété admise.

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels appartenant à cet intervalle.

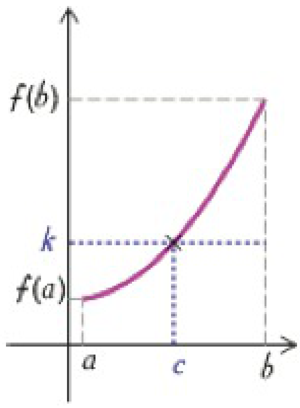
Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, **il existe au moins un réel c compris entre a et b** tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c comprise entre a et b.



TVI cas non monotone

Complément : Cas où f est monotone

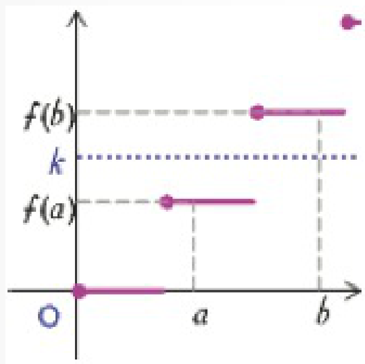


TVI cas monotone

Si de plus la fonction f est **strictement monotone** sur l'intervalle I, alors le réel c est **unique**.

Attention : La continuité est une hypothèse essentielle du théorème

Si la fonction f n'est pas continue, il est possible que pour un réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il n'existe aucune solution à l'équation $f(x) = k$! !



Contre exemple

> Utiliser la calculatrice pour calculer une intégrale

Reprenons l'exemple de l'*activité - p.44* précédente et calculons à l'aide de la calculatrice la valeur de $\int_0^2 4 - x^2 \, dx$

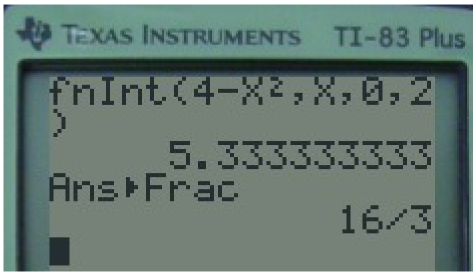
1.0.0. Sur calculatrice TI

Méthode

La fonction intégrale se trouve dans le menu $\boxed{\text{MATH}}$ sous la dénomination *fnInt(*

Les arguments à passer à la fonction fnint(sont dans l'ordre

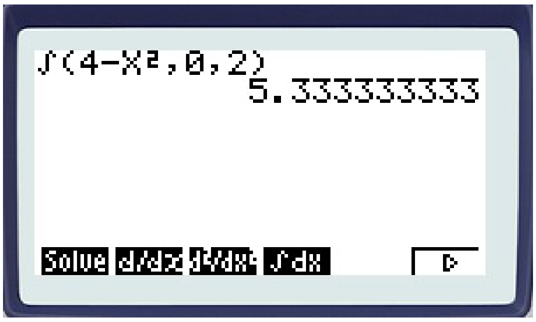
- la fonction
- la variable (X en général)
- la première borne de l'intervalle (a)
- la seconde borne de l'intervalle (b)



On obtient donc $\int_0^2 4 - x^2\, dx = \dfrac{16}{3}$

2.0.0. Sur calculatrice Casio

Méthode



La fonction intégrale se trouve en mode calcul dans le menu $\boxed{\text{OPTN}}$ / [*CALC*] / [$\int dx$] (à coté de la fonction dérivée).

Les arguments à passer à la fonction sont dans l'ordre

- la fonction
- la première borne de l'intervalle (a)
- la seconde borne de l'intervalle (b)

On obtient donc $\int_0^2 4 - x^2\, dx \approx 5,33$

Solutions des exercices

> Solution n°1

Exercice p. 9

f est continue d'après le cours. Un carré étant positif, on en déduit que la constante k cherchée doit être nécessairement positive.

Calculons $\displaystyle\int_a^b k\,x^2\,dx = k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = k \times \frac{1}{3} - k \times 0$

Puisque l'intégrale doit valoir 1, on en déduit que $k = 3$

La fonction $f\ : x \longmapsto 3\,x^2$ est une densité de probabilité sur $[0\,;1]$

> Solution n°2

Exercice p. 11

$\mathbb{P}(X \leqslant \frac{1}{3}) = \displaystyle\int_0^{1/3} 3\,x^2\,dx$

Soit$F(x) = x^3$ une primitive de f. $\mathbb{P}(X \leqslant \frac{1}{3}) = F(\frac{1}{3}) - F(0) = \frac{1}{27}$

> Solution n°3

Exercice p. 11

$\mathbb{P}(X \leqslant m) = F(m) - F(0) = m^3$

Nous cherchons à résoudre l'équation$m^3 = 0,5$. EN passant au logarithme, on a

$3\ln m = \ln 0,5$ donc $\ln m = \dfrac{\ln 0,5}{3}$

Donc $m = e^{\frac{\ln 0,5}{3}} \approx 0.79$

> Solution n°4

Exercice p. 11

$\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^1 x \times 3\,x^2\,dx = \left[3\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$

> Solution n°5

Exercice p. 14

On sait que $\mathbb{P}(T < 2) = \dfrac{2-0}{15-0} = \dfrac{2}{15}$

La probabilité d'attendre moins de 2 minutes est donc environ 0,13.

Exercice p. 14

> Solution n°6

On sait que $\mathbb{P}(7 < T < 12) = \dfrac{12-7}{15-0} = \dfrac{5}{15}$

On a donc une chance sur 3 d'attendre entre 7 et 12 minutes.

> Solution n°7

Exercice p. 15

$X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,5\,;2]$.

> Solution n°8

Exercice p. 15

```
S prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à 10 faire
    • S prend la valeur S + Random*1.5+0.5
Afficher S/10
```

Le programme ci-dessus retourne :

> Solution n°9

Exercice p. 15

On sait que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{b+a}{2} = \dfrac{0,5+2}{2} = 1,25$

Le temps moyen mis par les employés pour se rendre sur le lieu de travail est donc une heure et quart.

Ce résultat est à rapprocher de la simulation faite qui avait donné 1,23. Ce résultat théorique est **en conformité avec la simulation** sur calculatrice.

Exercice p. 17

> Solution n°10

G(0)=1 car on est certain qu'au moment de l'achat, le téléviseur fonctionne. Il a été testé en usine.

Calculons $\mathbb{P}_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+s)$:

$$\mathbb{P}_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+s) = \frac{\mathbb{P}[(T \geqslant t+s) \cap (T \geqslant t)]}{\mathbb{P}(T \geqslant t)}$$

Or si le téléviseur est encore en fonctionnement au temps $t+s$, il y est aussi au temps t, donc l'événement $(T \geqslant t+s) \cap (T \geqslant t)$ est identique à l'événement $(T \geqslant t+s)$

Donc $\mathbb{P}_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+s) = \dfrac{\mathbb{P}(T \geqslant t+s)}{\mathbb{P}(T \geqslant t)}$

On sait que le téléviseur suit une loi sans usure donc pour tous t et s positifs $\mathbb{P}_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+s) = \mathbb{P}(T \geqslant s)$

Donc $\mathbb{P}(T \geqslant s) = \dfrac{\mathbb{P}(T \geqslant t+s)}{\mathbb{P}(T \geqslant t)}$

D'où l'on déduit que $G(t+s) = G(s) \times G(t)$

> Solution n°11

Exercice p. 17

G et G' sont proportionnelles

Nous avons vu dans l'activité *« D'un modèle discret à un modèle continu »* de la construction de la fonction exponentielle que la relation $G(t+s) = G(s) \times G(t)$ pour tous s et t impose que G et G' soient **proportionnelles**.

Cela prouve qu'il existe une constante $k \neq 0$ telle que $G'(t) = k \cdot G(t)$

G possède nécessairement une forme exponentielle.

Pour démontrer que G s'écrit nécessairement sous la forme $G(t) = e^{kt}$, puisque $k \neq 0$, nous allons calculer

$$\left[G\left(\frac{x}{k}\right)\right]' = \frac{1}{k}G'\left(\frac{x}{k}\right)$$

Mais $G'\left(\dfrac{x}{k}\right) = k \cdot G\left(\dfrac{x}{k}\right)$

Donc $\left[G\left(\dfrac{x}{k}\right)\right]' = \dfrac{1}{k}kG\left(\dfrac{x}{k}\right) = G\left(\dfrac{x}{k}\right)$

De plus $G\left(\dfrac{0}{k}\right) = G(0) = 1$

On en déduit d'après la *construction de la fonction exponentielle - p.47* que $G\left(\dfrac{x}{k}\right) = e^x$

Posons $t = \dfrac{x}{k}$, $x = k \cdot t$ et donc $G(t) = e^{kt}$

> Solution n°12

Exercice p. 17

$G(t)$ désigne une probabilité donc est un nombre entre 0 et 1. $G(0) = 1$ et si$t \geqslant 0$ $0 \leqslant G(t) \leqslant 1$

La fonction G est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Puisque $G'(t) = ke^{kt}$ et que l'exponentielle est positive, c'est que k est nécessairement **négatif**.

On pose donc $G(t) = e^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$

> Solution n°13

Exercice p. 17

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ donc $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

- la fonction f est **continue** et **positive** sur $\mathbb{R}^+$
- de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = (\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-\lambda x}) = 1 - 0$

La fonction f est donc une fonction densité sur $\mathbb{R}^+$

> Solution n°14

Exercice p. 17

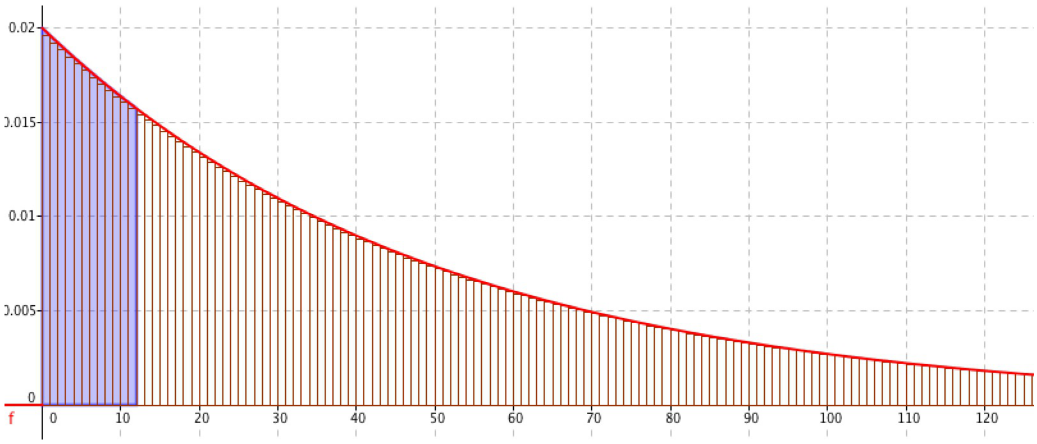
$f(0) = \lambda = 0,02$ d'après le graphique.

Donc $f(x) = 0,02e^{-0,02x}$ si $x \geqslant 0$ est la fonction densité de probabilité de T.

> Solution n°15

Exercice p. 17

$\mathbb{P}(T < 12) = \int_0^{12} 0,02e^{-0,02x}dx = \left[-e^{-0,02x}\right]_0^{12} \approx 0,21$



On peut donc s'attendre à une probabilité de panne de 21% la première année.

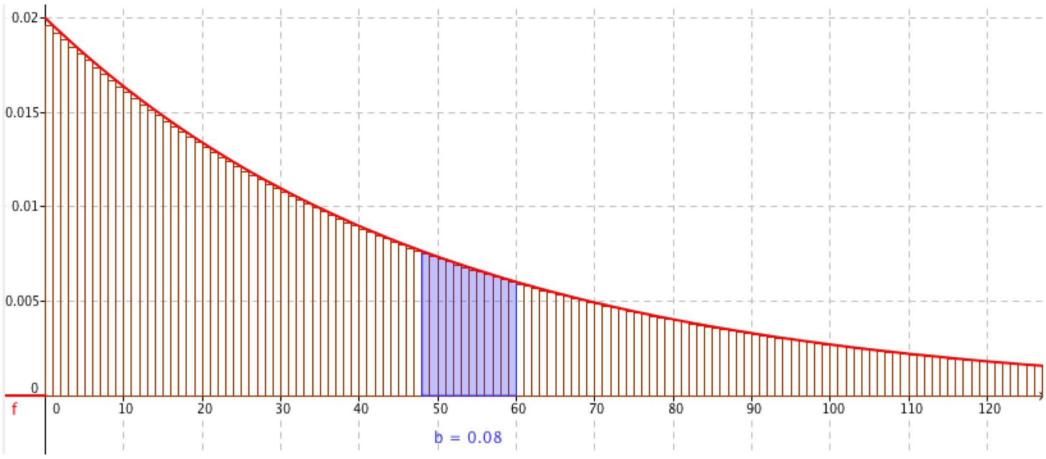
Mais cette probabilité illustre également le risque de panne dans l'année qui vient quelque soit le moment considéré ou le téléviseur est encore en fonctionnement.

> Solution n°16

Exercice p. 17

Si la première panne survient dans la 4ème année, elle survient entre le 48 ème et le 60 ème mois.

$\mathbb{P}(48 < T < 60) = \int_4 8^{60} 0,02e^{-0,02x}dx = \left[-e^{-0,02x}\right]_{48}^{60} \approx 0,082$

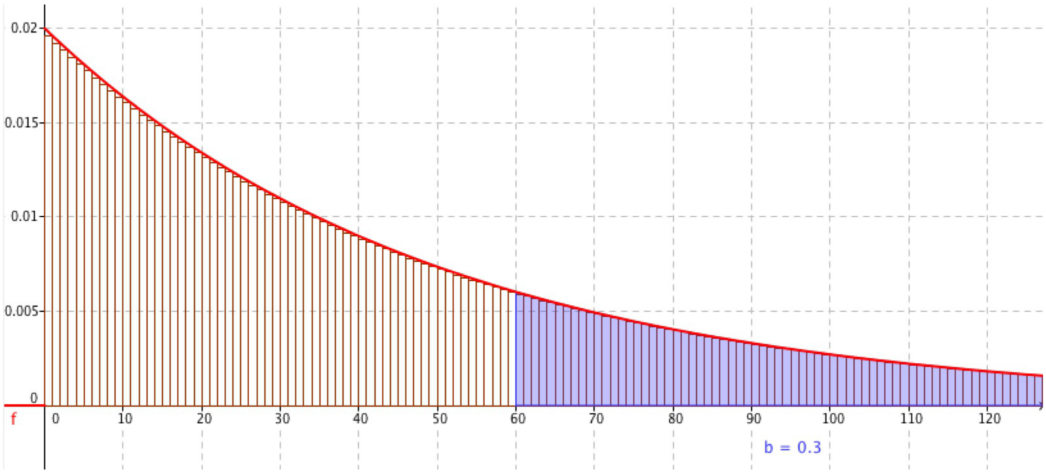


Il y a donc un peu plus de 8% de chance que la première panne survienne entre la 4ème et la 5ème année.

> Solution n°17

Exercice p. 17

Pour que l'appareil fonctionne 5 ans sans une seule panne, il faut que la première panne arrive au delà de 60 mois. On cherche donc $\mathbb{P}(T > 60) = 1 - \mathbb{P}(T \leqslant 60) = 1 - 0,7 \approx 0,3$



Il y a donc environ 30% de chance pour que le téléviseur survive à 5 ans.

> Solution n°18

Exercice p. 19

On sait que $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$

Donc si $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}(T \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$

Mais aussi $\mathbb{P}(T \geqslant x) = \mathbb{P}(T > x) = 1 - \mathbb{P}(T \leqslant x) = e^{-\lambda \cdot x}$

$\mathbb{P}_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t + s) = \dfrac{\mathbb{P}[(T \geqslant t + s) \cap (T \geqslant t)]}{\mathbb{P}(T \geqslant t)}$

Or si $T \geqslant t + s$ alors $T \geqslant t$, donc l'événement $(T \geqslant t + s) \cap (T \geqslant t)$ est identique à l'événement $(T \geqslant t + s)$

Par conséquent $\mathbb{P}_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t + s) = \dfrac{\mathbb{P}(T \geqslant t + s)}{\mathbb{P}(T \geqslant t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(T \geqslant s)$

Donc la variable aléatoire T suit un modèle sans vieillissement. cqfd.

> Solution n°19

Exercice p. 19

On sait que l'espérance de la variable T se calcule par $\mathbb{E}(T) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t \cdot f(t)\, dt$

Posons $G\ : t \longmapsto -\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$

$G'(t) = -(e^{-\lambda t} + \left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)(-\lambda)e^{-\lambda t})$

$G'(t) = \lambda t \cdot e^{-\lambda t}$

Donc G est une primitive de $t \cdot f(t)$.

Par conséquent, on peut calculer

$I(x) = \int_0^x t \cdot f(t) dt = \left[-\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^x$

$I(x) = \dfrac{1}{\lambda} - \left(x + \dfrac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}$

Or on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot e^{-\lambda x} = 0$ puisque λ est positif.

On en déduit que $\mathbb{E}(T) = \lim\limits_{x \to +\infty} I(x) = \dfrac{1}{\lambda}$

> Solution n°20

Exercice p. 20

On sait que $\mathbb{P}(T \leqslant 12) = 0,159$

Puisque $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on peut écrire que $1 - e^{-12\cdot\lambda} = 0,159$

Donc $e^{-12\cdot\lambda} = 0,841$

Donc $-12 \cdot \lambda = \ln(0,841)$

Donc$\lambda \approx 0,0144$

La fonction densité de la variable aléatoire T sur $\mathbb{R}^+$ est donc définie par $f(t) = 0,0144 \cdot e^{-0,0144t}$

> Solution n°21

Exercice p. 20

On sait que $\mathcal{E}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} \approx 69,2$

On peut donc « *espérer* » qu'en moyenne, la première panne ou casse de notre iPhone4 surviendra au bout de 69 mois c'est à dire 5 ans et 9 mois. Il ne semble pas très pertinent de souscrire une assurance sur 3 ans.

> Solution n°22

Exercice p. 20

Calcul du paramètre

On sait que $\mathbb{P}(X \leqslant 12) = 0,021$

Puisque $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on peut écrire que $1 - e^{-12\cdot\lambda} = 0,021$

Donc $e^{-12\cdot\lambda} = 0,979$

Donc $-12 \cdot \lambda = \ln(0,979)$

Donc$\lambda \approx 0,00177$

Calcul de l'espérance

On sait que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda} \approx 565$

Si on exclut les causes accidentelles de panne, on peut espérer que notre iPhone fonctionne 565 mois soit un peu plus de 47 ans, ou 17209 jours, où 361401 heures...

Le MTBF de notre iPhone4 est donc d'un peu plus de 360 000 heures.

> Solution n°23

Exercice p. 21

Soit X la variable aléatoire associant à tout atome de carbone14 sa durée de vie en années. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(0,00012)$

On sait que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda} \approx 8333$

Donc la durée de vie moyenne d'un atome de Carbone 14 est de 8333 ans.

> Solution n°24

Exercice p. 21

On cherche $\mathbb{P}(X > 10000) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 10000)$

Or on sait que $P(X \leqslant 10000) = 1 - e^{-10000\lambda} \approx 1 - 0,30$

Donc $\mathbb{P}(X > 10000) \approx 0,30$ soit donc 30% de chances qu'un tel atome soit encore actif au bout de 10000 ans.

> Solution n°25

Exercice p. 21

$\mathbb{P}(X \geqslant m_{1/2}) = 0,5 \Longleftrightarrow e^{-\lambda \cdot m_{1/2}} = 0,5 \Longleftrightarrow -\lambda \cdot m_{1/2} = \ln 2 \Longleftrightarrow m_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

Donc la médiane de la variable aléatoire X vaut environ $\dfrac{\ln 2}{0,00012} \approx 5776$

La demi-vie d'un atome de Carbone14 est donc d'environ 5776 ans.

⚠ *Attention*

La demi-vie d'un atome n'est pas égale à la moitié de la durée de vie moyenne !

$5776 \neq \dfrac{8333}{2}$

> Solution n°26

Exercice p. 25

L'expérience consiste à répéter **3 fois** une épreuve de Bernoulli du type Succès/Echec, le succès étant l'obtention de la face 1 sur la table. Chacune de ces épreuves ont une **probabilité de succès de 0,25**.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès de notre épreuve de Bernoulli. Elle suit donc une Loi Binomiale $\mathcal{B}(3\,;0,25)$ de paramètres 3 (le nombre de répétitions de l'épreuve) et 0,25 (la probabilité de succès de l'épreuve).

Exercice p. 25

> Solution n°27

Rappel

On sait que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une Loi Binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ est $n \times p$

$E(X) = 3 \times 0.25 = 0.75$

> Solution n°28

Exercice p. 25

La loi de probabilité de X est de tableau donnant :

- en première liste, le nombre de succès possible, donc tous les entiers k allant de *0* à n,
- en deuxième liste, les probabilités d'obtenir **exactement** 0, 1, ..., n succès parmi les n épreuves.

A l'aide de TI

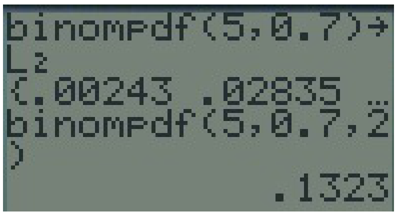
Tout d'abord, on crée dans la liste *L1* les valeurs de k possibles au moyen de la fonction *SEQ* se trouvant dans $\boxed{\text{2nd}}\boxed{\text{LIST}}\boxed{\text{OPS}}$ 5 : *seq*. La fonction s'utilise avec la syntaxe ci-contre :

Ensuite on calcule la loi de probabilité de la loi binomiale de paramètres n=*5* et p=*0,7* au moyen de la fonction *binompdf* se trouvant dans $\boxed{\text{2nd}}\boxed{\text{DISTR}}$ 0 : *binompdf(*.

La fonction s'utilise avec la syntaxe ci-contre.

La première commande permet de stocker toute la loi de probabilité dans la liste *L2*.

La seconde commande permet d'obtenir la probabilité $\mathbb{P}(X = 2)$.



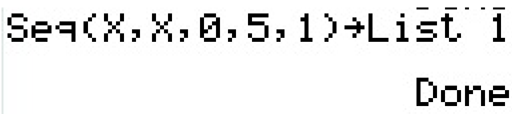
La loi de probabilité se trouve alors disponible dans le menu $\boxed{\text{STAT}}$ 1 : *Edit...*

Complément : Utilisation de la fonction TABLE des fonctions

Une autre méthode est possible : utiliser la fonction *TABLE de VALEURS* de la calculatrice avec la fonction $Y1 = Binompdf(5, 0.7, X)$.

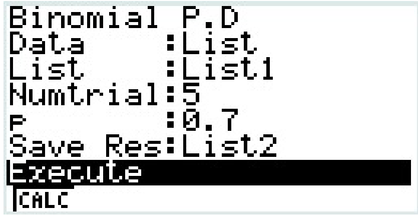
Cette méthode, applicable uniquement sur TI, est décrite dans le document papier du paragraphe suivant.

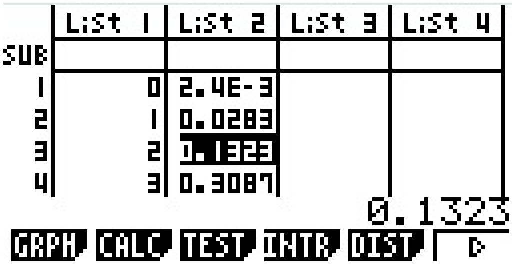
A l'aide de Casio

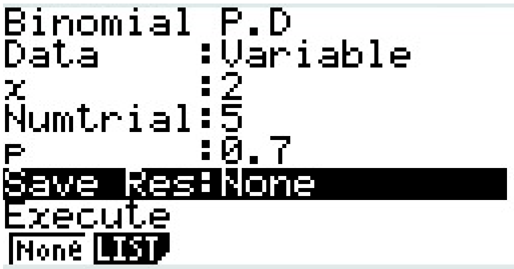


Tout d'abord on crée dans la liste *L1* les valeurs de *k* possibles au moyen de la fonction *SEQ* se trouvant dans OPTN F1 *LIST* F5 *Seq*. La fonction s'utilise avec la syntaxe ci-contre.

Ensuite on calcule la loi de probabilité de la loi binomiale de paramètres *n=5* et *p=0,7* en allant dans le MENU *STAT2*. On retrouve la Liste 1 remplie avec les valeurs de 0 à 5. On met List 2 en surbrillance puis F5 *DIST* F5 *BINM* F1 *Bpd*. On remplit ensuite les paramètres comme indiqué ci-contre.:







Le paramétrage suivant de la fenêtre *Bpd* permet de calculer $\mathbb{P}(X = 2)$ pour X suivant la loi Binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,7$.

> Solution n°29

Exercice p. 30

On sait que $E(X) = n \times p$ donc $\mu_x = 100 \times 0,5 = 50$

De même l'écart type $\sigma_x = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0,5 \times 0.5} = \sqrt{25} = 5$

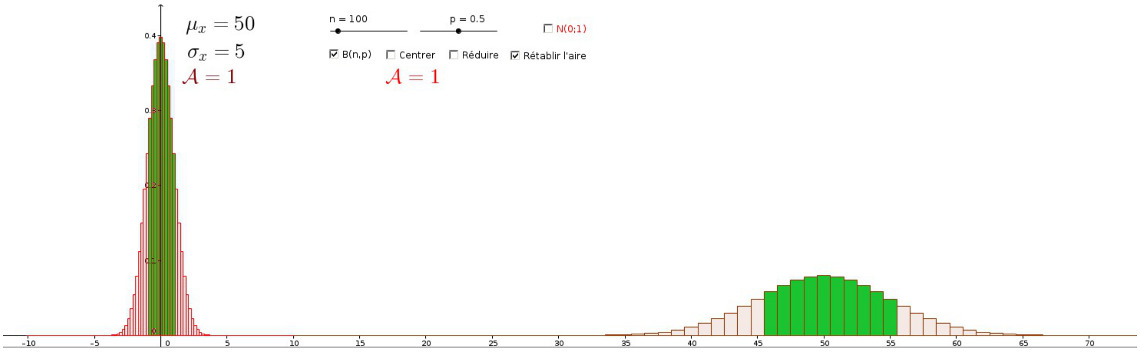
> Solution n°30

Exercice p. 30

On a $\dfrac{45 - \mu_x}{\sigma_x} = \dfrac{45 - 50}{5} = -1$

et $\dfrac{55 - \mu_x}{\sigma_x} = \dfrac{55 - 50}{5} = 1$

L'opération de centrage ne change pas les aires (simple translation). L'opération de normalisation ne les change pas non plus car la largeur des rectangles est divisée par 5 mais la hauteur est multipliée par 5 et donc au final l'aire est conservée.



On en conclut que les aires représentées en vert sur les deux graphiques sont identiques.

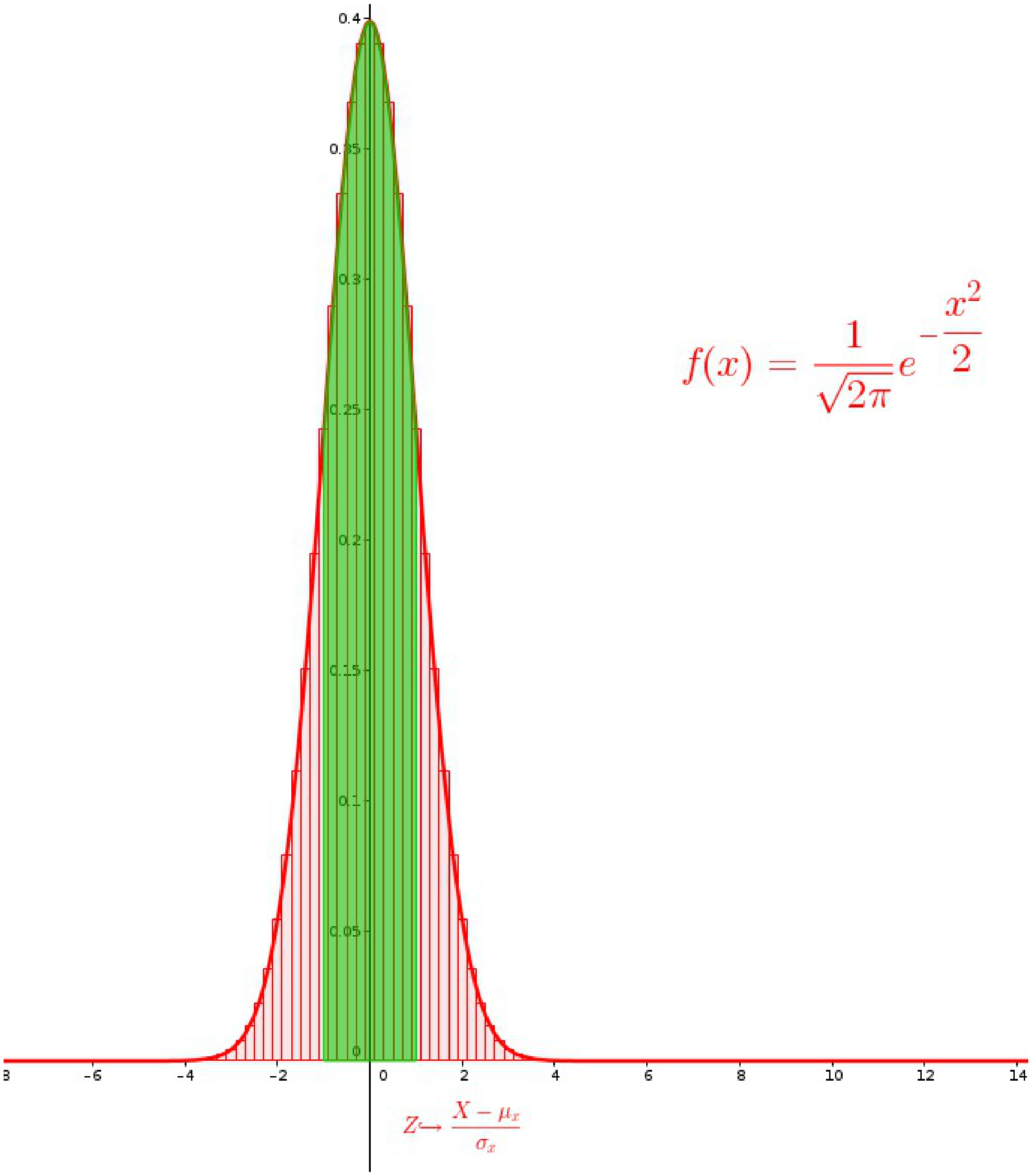
Par conséquent, $\mathbb{P}(45 < X \leqslant 55) = \mathbb{P}(-1 < Z \leqslant 1)$

> Solution n°31

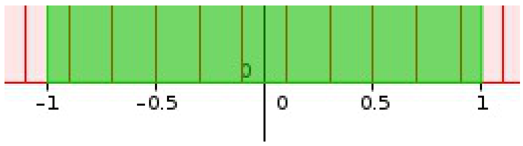
Exercice p. 30

La loi binomiale centrée réduite s'approche beaucoup de la courbe de Gauss lorsque n est assez grand. Par conséquent, il y a très peu de différence entre $\mathbb{P}(-1 < Z \leqslant 1)$ et l'aire sous la courbe de gauss pour x compris entre -1 et 1.

Par conséquent, $\mathbb{P}(45 < X \leqslant 55) = \mathbb{P}(-1 < Z \leqslant 1) \approx \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$



Remarque



En zoomant sur l'intégrale, on remarque que les bornes de l'intégrale coupent les rectangles du bord en deux (voir ci-contre). De ce fait, le rectangle de droite qui correspond à $(X = 55)$ est **compté à moitié** et le rectangle de gauche qui correspond à $(X = 45)$ est également **compté à moitié**. Cela revient à dire que l'on compte totalement le rectangle de droite $(X = 55)$ et pas du tout le rectangle de gauche $(X = 45)$.

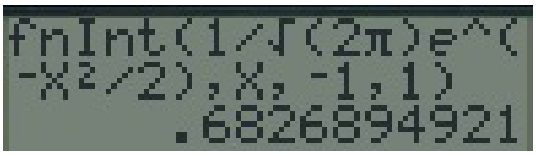
Cela explique pourquoi dans la probabilité, on a exclu 45 et on inclut 55.

Exercice p. 30

> Solution n°32

$\mathbb{P}(45 < X \leqslant 55) \approx 0.68027$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \approx 0,68269$$

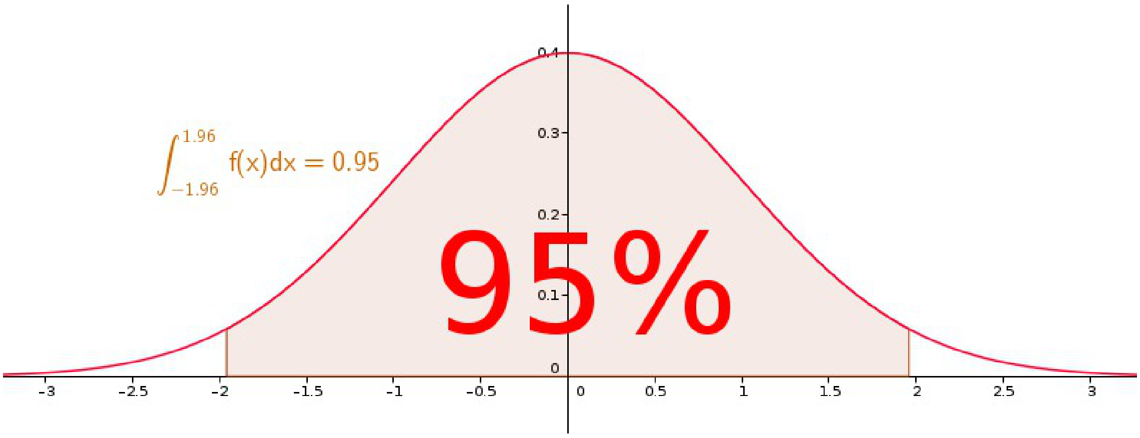


L'erreur commise en approximant la loi binomiale par l'intégrale de la fonction de Gauss est donc ici de **0,0024**, soit de l'ordre de deux millièmes, ce qui est très peu.

> Solution n°33

Exercice p. 32

A l'aide de geogebra, on détermine que $\mathbb{P}(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) = 0,95$ soit une probabilité de 95%.



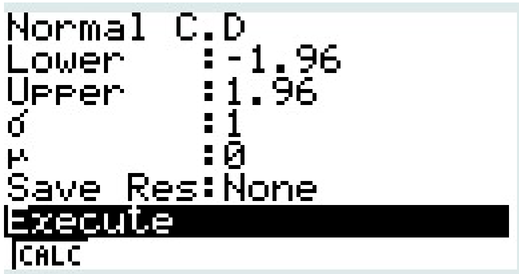
Avec la TI

La fonction `normalpdf(` se trouvant dans le menu distrib est la fonction densité de la loi normale. Par conséquent, la commande ci-contre fournit également le résultat escompté.

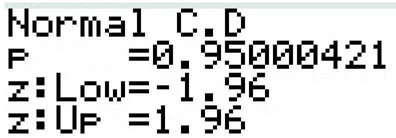
La fonction normalcdf(se trouvant à coté permet de calculer la probabilité. Voici comment elle s'utilise :

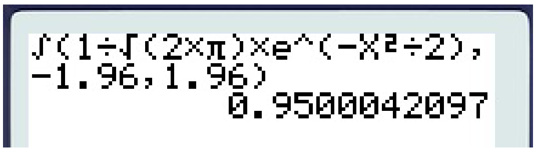
Avec la Casio

Aller dans le $\boxed{\text{MENU}}$ *STAT2* puis $\boxed{\text{F5}}$ *DIST* $\boxed{\text{F5}}$ *NORM* $\boxed{\text{F1}}$ *Ncd.* On remplit ensuite les paramètres comme indiqués ci-contre :



Le résultat est alors disponible sur l'écran ci-contre :





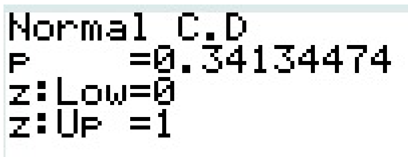
On peut aussi utiliser la fonction de Gauss $f\ : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-x^2}{2}}$ et son intégrale entre -1,96 et 1,96 :

> Solution n°34

Exercice p. 32

On sait que $\mathbb{P}(X \leqslant 0) = \dfrac{1}{2}$

On calcule $\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0,3413$



Donc $\mathbb{P}(X \leqslant 1) \approx 0,8413$

On peut aussi calculer en prenant pour valeur inférieure -1×10^{99} qui est un nombre très petit et 1 :

> Solution n°35

Exercice p. 32

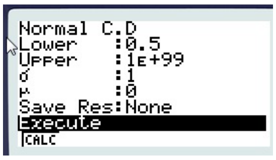
On sait que $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 0,5$

On calcule $\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 0,5) \approx 0.1915$

Par conséquent $\mathbb{P}(X \geqslant 0,5) \approx 0,5 - 0,1915 \approx 0,3085$.

On peut aussi calculer ainsi :

ou sur casio :



> Solution n°36

Exercice p. 33

Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ la fonction densité de la variable aléatoire X

Posons $H(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt$ par propriété de symétrie car la fonction f est paire.

D'après le *théorème fondamental de l'intégration - p.46*, on sait que H est dérivable et $H'(x) = 2f(x)$ donc positive sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction H est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

De plus

- $H(0) = \displaystyle\int_{0}^{0} f(t)\,dt = 0$
- et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1$ car la fonction f est une fonction densité sur $\mathbb{R}$ donc possède une aire totale sous la courbe égale à 1.

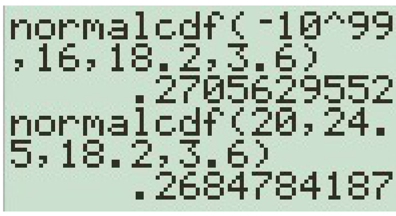
Pour tout réel $\alpha \in]0\,;1[$, $1 - \alpha \in]0\,;1[$.

Donc les hypothèses du *TVI - p.48* sont vérifiées et on peut affirmer qu'il existe un unique réel $u_\alpha \geqslant 0$ tel que$H(u_\alpha) = 1 - \alpha$

cqfd

> Solution n°37

Exercice p. 36



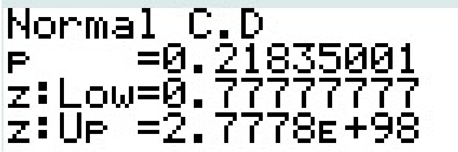
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(18,2;3,6^2)$

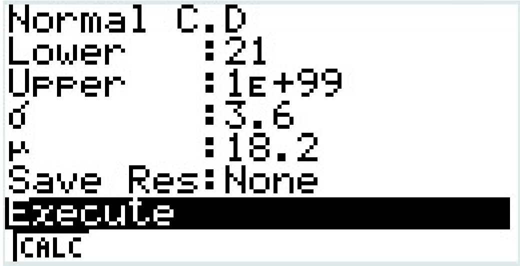
$\mathbb{P}(x \leqslant 16) \approx 0,27$

$\mathbb{P}(20 \leqslant x \leqslant 24,5) \approx 0,27$

$\mathbb{P}(x \leqslant 16) \approx 0,268$

$\mathbb{P}(x \geqslant 21) \approx 0.218$





Attention

Dans l'écriture de la loi normale : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(18,2;3,6^2)$, on fait apparaître la variance.

Dans l'usage des fonctions de la calculatrice, c'est bien **l'écart type qui est à renseigner**.

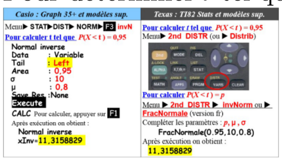
Méthode : Intervalles non bornés

Pour simplifier le calcul sur un intervalle non borné ($]-\infty\,;b]$ ou $[a\,;+\infty[$), une astuce consiste à mettre 10^{99} (ou -10^{99}) en lieu et place de la **borne infinie**.

> Solution n°38

Exercice p. 36

1. Pour déterminer t tel que : $P(x \leq t) = 0,95$ on utilise les instructions suivantes :



2. Pour déterminer t tel que : $P(x \geq t) = 0,85$:
   - sur Casio : on remplace **"left"** par **"right"** : on trouve $t \approx 9,17$.
   - Sur TI, il faut procéder auparavant à une petite transformation :
     $P(X < t) = 1 - P(X > t) = 1 - 0,85 = 0,15$
     Puis on applique la méthode précédente. On trouve $t \approx 9,17$.

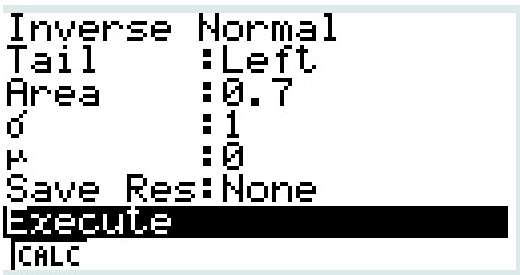
> Solution n°39

Exercice p. 36

Posons $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0\,;1)$

On sait que $\mathbb{P}(X \leqslant 60) = 0,70$.

Ramenons-nous à la **loi centrée réduite** et cherchons le nombre s tel que $\mathbb{P}(Z \leqslant s) = 0,70$



Cela se fait en utilisant la fonction inverse normal sur Casio. On place Tail à Left car Z est à gauche de la borne s cherchée. La réponse obtenue est 0,524.

Sur TI, on va utiliser la fonction `invNorm(` de la manière suivante :

On sait par le passage à la loi réduite que $\dfrac{60-\mu}{20} = s$

Une fois la valeur de $s \approx 0,524$ trouvée, on en déduit l'espérance par une simple équation :
$\mu \approx 60 - 20 \times 0.524 \approx 49,5$