Terminale S

Continuité - Dérivation

1.0

Olivier Lecluse

Juillet 2013

Table des matières

Objectifs

Dans ce chapitre, nous aborderons une nouvelle notion : la continuité des fonctions.

Le Théorème des Valeurs Intermédiaires en est une des principales applications.

Dans ce chapitre, il est important de bien se souvenir du chapitre sur la *dérivation*[1] vu en classe de première.

1 - http://lcs.allende.lyc14.ac-caen.fr/~lecluseo/1ES/Derivees_web/web/

Notion de continuité

I

Il arrive souvent qu'une fonction soit définie par intervalle. L'exemple le plus fréquent est le calcul des impôts sur le revenu : en effet, en fonction des revenus annuels, la formule permettant de calculer l’impôt diffère.

Mais pour que ces formules soient équitables, il faut une certaine **continuité** entre les tranches d'imposition afin que celui qui gagne 26420 €/an paie pratiquement la même somme que celui qui ne gagne "que" 26419 €/an !

C'est là tout l'objet de ce chapitre que d'étudier mathématiquement cette notion de continuité.

Elle illustre aussi l'idée qu'on peut tracer la courbe d'une fonction "sans lever le crayon".

Nous allons tout d'abord creuser la situation du calcul des tranches d'impôt lors d'une première activité.

A. Le calcul de l'impôt

Extrait de la "fiche de calculs facultatifs". Impôt sur les revenus 2011

Voici un extrait de la fiche de calcul pour les impôts 2011.

Impôt sur le revenu

L'impôt retenu pour le plafonnement est constitué du total de l'impôt sur le revenu acquitté par le contribuable, y compris l'impôt acquitté à un taux proportionnel, à l'exception de la fraction supplémentaire d'impôt résultant de l'augmentation de 40 % à 41 % du taux de la dernière tranche du barème progressif. Il convient donc de recalculer l'impôt sur le revenu au barème en limitant le taux à 40 %.

Barème de l'impôt sur le revenu applicable

Si votre quotient familial (R/N) [R = revenu imposable et N = nombre de parts] :

n'excède pas	5 963 €	votre impôt sera égal à : 0
est supérieur à	5 963 € et inférieur ou égal à 11 896 €	votre impôt sera égal à : (R x 0,055) - (327,97€ x N)
est supérieur à	11 896 € et inférieur ou égal à 26 420 €	votre impôt sera égal à : (R x 0,14) - (1 339,13 € x N)
est supérieur à	26 420 € et inférieur ou égal à 70 830 €	votre impôt sera égal à : (R x 0,30) - (5 566,33 € x N)
est supérieur à	70 830 €	votre impôt sera égal à : (R x **0,40**) - (13 357,63 € x N)

Pour vous aider à calculer votre impôt sur le revenu au barème, reportez-vous à la fiche de calcul de la notice de votre déclaration des revenus de 2010, disponible sur impots.gouv.fr.

Dans toute cette activité, on considérera le revenu d'un célibataire. Le nombre N de parts est alors égal à 1.

Question 1

[Solution n°1 p 33]

Un célibataire a un revenu imposable annuel de 6000 €. Calculer son impôt. Comment interpréter ce résultat ?

Même question avec un revenu imposable de 20000 €.

Question 2

[Solution n°2 p 33]

Une personne a un revenu imposable de 20000€. Vérifier que son impôt se décompose de la manière suivante :

- Rien sur les 5963 premiers euros
- 5,5% sur les 5933 euros restants
- 14% sur le reste de ses revenus

Question 3

[Solution n°3 p 33]

Une personne a un revenu imposable de 30000 €. Donner la décomposition de son impôt selon les tranches d'imposition comme à la question précédente.

Question 4

[Solution n°4 p 34]

Une personne célibataire dont le revenu est 11000 € vous tient cette conversation :

« Heureusement que je n'ai pas fait d'heures supplémentaires, car alors j'aurai changé de tranche et mon taux d'imposition aurait presque triplé. J'aurai perdu de l'argent dans l'opération. »

Que lui répondez-vous ?

Question 5

[Solution n°5 p 34]

On note $f\ : x \longmapsto f(x)$ la fonction qui donne l'impôt d'une personne célibataire ayant un revenu imposable de x €.

Représenter dans un repère dont l'unité est 1cm pour 2500€ la courbe représentative de *f*.

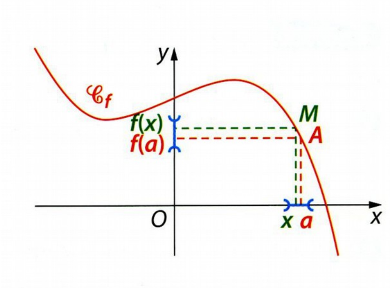
Quelles conclusions pouvez-vous tirer à l'observation de ce graphique ?

Question 6

[*Solution n°6 p 34*]

Corriger le document des impôts afin de donner la bonne formule sur la dernière tranche d'imposition.

B. Définition



Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. On note C_f la courbe représentative de *f* et *A* le point de C_f d'abscisse *a*. Pour tout réel $x \in I$, on considère le point M de C_f d'abscisse *x*.

En général, lorsque la courbe C_f est "sans trous", c'est à dire qu'on peut la parcourir sans lever le crayon, lorsque le nombre *x* est proche du nombre *a*, le point *M* est également proche du point *A*.

On dit alors que la fonction est *continue* sur l'intervalle I. Nous allons formaliser cette notion de manière un peu plus rigoureuse en nous aidant de la notion de limite vue au chapitre précédent.

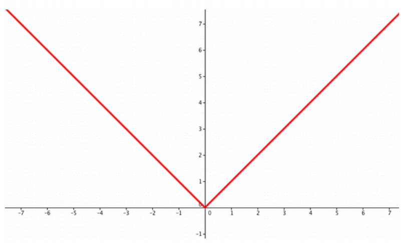
Définition : Définition rigoureuse de la continuité

Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I

On dit que la fonction f est *continue en un réel* $a \in I$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

On dit que la fonction *f* est *continue sur un intervalle* I si f est continue pour tout réel $a \in I$

Exemple : Fonction valeur absolue



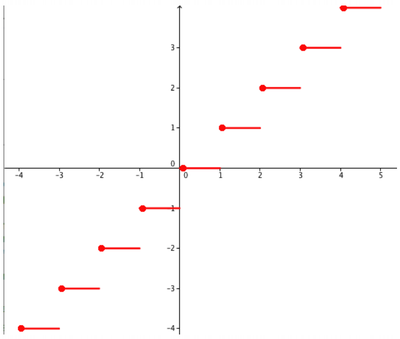
On définit la fonction *valeur absolue* sur $\mathbb{R}$ par :

- *V(x)=x* si *x≥0*
- *V(x)=-x* si *x<0*

Cette fonction se représente par deux fragments de droites qui se joignent en 0. Sa courbe représentative forme un « *V* » assez reconnaissable.

Cette fonction est définie pour tout réel et est continue sur $\mathbb{R}$ car même en 0 où se produit un changement de forme, on peut ne pas **lever le crayon** lors du tracé.

Exemple : Partie entière



On définit la fonction *partie entière* sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto E(x)$ où *E(x)* est le **plus grand entier inférieur ou égal** à *x*. Ainsi

- *E(2,5)=2*
- *E(-2,4)=-3*
- *E(1,9999999)=1*
- *E(2)=2*

La fonction partie entière n'est **pas continue pour chaque valeur de x entière**. Elle forme ce qu'on appelle une *fonction en escalier*.

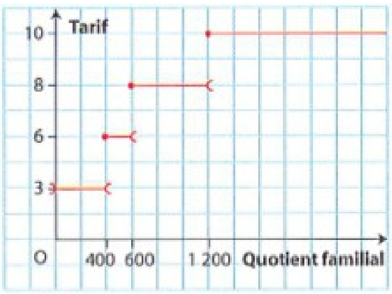
Elle est par contre continue sur *« chaque marche »*, c'est à dire sur chaque intervalle $[n\,;n+1[$ où $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque valeur entière, un gros point sur la courbe indique la valeur effectivement prise par la fonction pour éviter toute ambiguïté de lecture graphique.

On voit sur cet exemple par exemple que

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} E(x) = 2$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} E(x) = 1$
- $E(1) = 1$

Par conséquent, la limite en 1 n'existe pas (il y a une limite à droite et une à gauche). On ne peut pas écrire $\lim\limits_{x \to 1} E(x) = E(1)$ donc la fonction **n'est pas continue en 1** et il en est de même pour chaque entier.

C. Étudier un exemple concret



Le graphique ci-contre représente le tarif (en euros) à la journée pratiqué par une commune pour l'accueil des enfants selon le quotient familial (en euros) du foyer.

Question 1

[*Solution n°7 p 35*]

Étudier graphiquement la continuité de la fonction sur l'intervalle]0 ;+∞[.

Question 2

[*Solution n°8 p 35*]

Donner l'expression de *f(x)* selon les intervalles auxquel *x* appartient.

D. Continuité des fonctions usuelles

En règle générale, toutes les fonctions que vous avez rencontrées jusqu'alors sont des fonctions continues. Cela découle des deux propriétés suivantes, que nous admettrons :

Fondamental : Continuité des fonctions usuelles

Les fonctions usuelles, à savoir :

- Les fonctions polynômes (sommes de puissances de *x*)
- les fonctions rationnelles (quotients de polynômes), notamment la fonction inverse
- la fonction racine carrée
- les fonctions exponentielles

ainsi que les fonctions composées de ces fonctions usuelles sont des fonctions **continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies**.

Fondamental : Continuité des fonctions dérivables

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Attention : Problème de dérivabilité des fonctions continues.

La réciproque de cette propriété est fausse.

En effet, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est **définie** sur $[0\,;+\infty[$ mais n'est **dérivable** que sur $]0\,;+\infty[$.

E. Exercice

Question

[Solution n°9 p 35]

Étudier la continuité de la fonction $f\ :\ x \longmapsto \sqrt{\dfrac{-x+2}{2x+3}}$

Indice :

Sur quel intervalle cette fonction est-elle définie ?

F. Définir une fonction continue sur un intervalle

Une fonction *f* est définie sur l'intervalle [0 ;+∞[par $f(x) = e^x$.

On souhaite définir sur]-∞ ;0[la fonction *f* par une expression du type $f(x) = -x + p$ où *p* est un réel à déterminer.

L'animation ci-dessous illustre la problématique en fonction des valeurs de *p*.

Question 1

[Solution n°10 p 36]

En vous aidant de l'animation ci-dessus, dire graphiquement pour quelle valeur de *p* la fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$.

Question 2

[Solution n°11 p 36]

Retrouver la valeur de p par le calcul pour laquelle la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

Indice :

La valeur de f en 0 doit être identique pour les deux expressions définissant la fonction.

Théorème des valeurs intermédiaires

II

A. Tableaux de variation

Fondamental : Convention

Il est convenu que, dans un tableau de variations, les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

Exemple : Tableau de la fonction carré

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=x^2$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Le tableau de variation de la fonction carré ($f : x \longmapsto x^2$) signifie que la fonction carré est **continue et strictement décroissante** sur]-∞ ;0] et qu'elle est **continue et strictement croissante** sur [0 ;+∞[.

B. Théorème des valeurs intermédiaires

Fondamental : Théorème des valeurs intermédiaires (TVI). Propriété admise.

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I. Soient a et b deux réels appartenant à cet intervalle.

Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, **il existe au moins un réel *c* compris entre a et b** tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c comprise entre a et b.

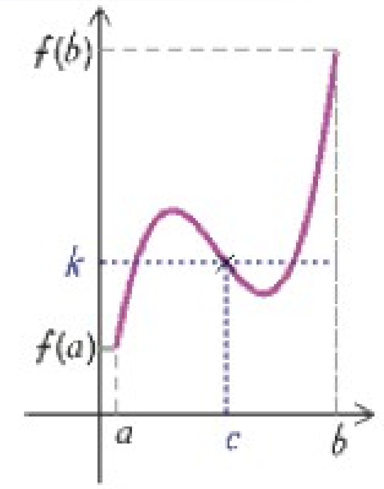


Image 1 TVI cas non monotone

Complément : Cas où f est monotone

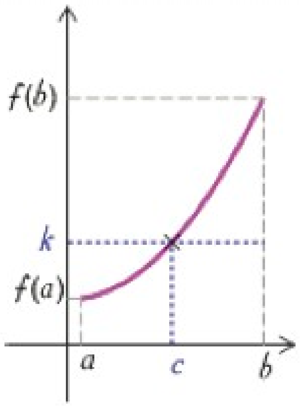


Image 2 TVI cas monotone

Si de plus la fonction f est **strictement monotone** sur l'intervalle I, alors le réel c est **unique**.

Attention : La continuité est une hypothèse essentielle du théorème

Si la fonction f n'est pas continue, il est possible que pour un réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il n'existe aucune solution à l'équation $f(x) = k$! !

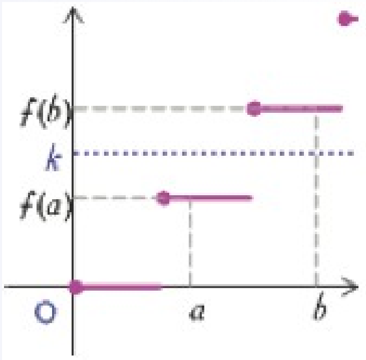


Image 3 Contre exemple

C. Solution approchée d'une équation

On considère la fonction $f(x) = x^3 + x$.

On cherche à déterminer la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 5$.

Question 1

[*Solution n°12 p 36*]

Montrer que la fonction *f* est **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle *I=[1 ;2]*

Question 2

[*Solution n°13 p 36*]

Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une solution unique sur I.

Question 3

[*Solution n°14 p 37*]

A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation *f(x)=5* à *0,1* près.

Indice :

On pourra utiliser la fonction tableau de valeurs.

D. TVI et limites infinies

Soit la fonction *f* dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Question

[Solution n°15 p 37]

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

E. Algorithme de dichotomie

On considère la fonction $f\ : x \longmapsto x^3 + x^2 - x + 1$ définie sur l'intervalle [-2 ;2]

Question 1

[Solution n°16 p 37]

Dresser le tableau de variations de *f*

Question 2

[Solution n°17 p 38]

Déterminer les valeurs du réel k pour que l'équation f(x)=k admette au moins une solution

On cherche à résoudre l'équation f(x)=0 . On considère l'algorithme suivant :

```
A prend la valeur -2
B prend la valeur -1
M prend la valeur -1,5
P=0,1
Tant Que B-A>P
... Si f(M)*f(A)>0
... ... A prend la valeur M
... Sinon
... ... B prend la valeur M
... M prend la valeur (A+B)/2
Fin TantQue
Afficher M
```

Question 3

[Solution n°18 p 38]

Compléter le tableau suivant en donnant à chaque début de passage dans la boucle les valeurs demandées

En déduire la valeur retournée par l'algorithme

	Etape 1	**Etape 2**	**Etape 3**	**Etape 4**	**Etape 5**
A	-2				
B	-1				
M	-1,5				
f(A)	-1				
f(M)	1,375				
(B-A)	1				

Question 4

[Solution n°19 p 39]

Expliquer le rôle de cet algorithme et son fonctionnement

Cet algorithme met en œuvre la méthode dite de *dichotomie* qui consiste à diviser par deux la longueur de recherche en prenant le milieu de l'intervalle à chaque fois.

Chacun a, peut-être sans le savoir, déjà utilisé cet algorithme dans des jeux type "trouver le nombre entre 0 et 100 auquel je pense". On essaye 50, et si la personne répond plus petit, on essaye 25 et ainsi de suite jusqu'à trouver le nombre cherché.

Question 5

[*Solution n°20 p 39*]

Programmer cet algorithme et l'adapter pour donner une valeur approchée de la solution f(x)=0 à 0,0001 près.

Indice :

On pourra utiliser Python en ligne[2] par exemple ou la calculatrice.

2 - http://www.pythontutor.com/

Rappels et compléments sur la dérivation

III

A. Rappels sur la dérivation

1. Dérivée en un point

Définition

Si le quotient $T_a(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ **tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0**, alors on dit que *f est dérivable en a*.

Le nombre réel vers lequel tend le taux d'accroissement $T_a(h)$ est appelé *nombre dérivé de f en a*. On le note $f'(a)$.

Remarque

En reprenant la notation des limites introduite lors de l'exercice précédent, on peut écrire

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Le nombre h s'étant rapproché de 0, le nombre dérivé $f'(a)$ **ne dépend plus que de a** contrairement au taux d'accroissement $T_a(h)$ qui **dépend à la fois de a et de h**. C'est la différence fondamentale qu'il y a entre le taux d'accroissement et le nombre dérivé : le second étant la limite du premier lorsque h tend vers 0.

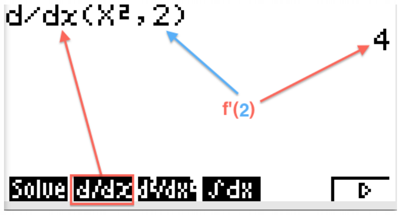
Exemple

En reprenant l'exercice du paragraphe précédent, on peut affirmer avec les notations introduites ici que $f : x \longmapsto x^2$ est **dérivable en 2** et $f'(2) = 4$.

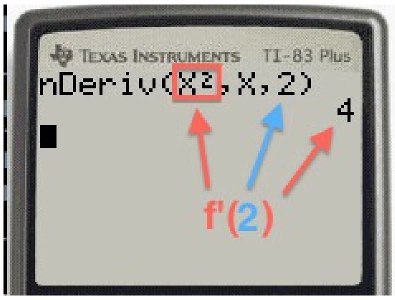
Complément : Utiliser la calculatrice Casio pour calculer f'(a)

Pour calculer la dérivée en un point avec une calculatrice de type CASIO, aller dans `MENU RUN OPTN CALC`.

On calcule ici la dérivée en 2 de la fonction $f(x) = x^2$, c'est à dire $f'(2)$.



Complément : Utiliser la calculatrice TI pour calculer f'(a)



Pour calculer la dérivée en un point avec une calculatrice de type TI, aller dans `MATH 8 :nDeriv(`.

On calcule ici la dérivée en 2 de la fonction $f(x) = x^2$, c'est à dire $f'(2)$.

2. Tangente à une courbe en un point

Si f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est la pente de la tangente à C_f au point d'abscisse A.

Fondamental

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a est donnée par :
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Complément

On peut vérifier que cette équation de droite correspond bien à la tangente à C_f en $x = a$ puisque :

- sa pente est $f'(a)$ (coefficient en facteur devant x)
- lorsque $x = a$, $y = f(a)$ donc la droite passe bien par le point $A(a\,;f(a))$

Une droite pouvant être **déterminée par sa pente et un point**, c'est donc bien notre tangente.

B. Rappels sur les dérivées des fonctions usuelles

1. Constantes

Fondamental : Dérivation d'une constante

La dérivée de la fonction constante $f(x) = k$ est $f'(x) = 0$.

Exemple

- La dérivée de $f(x) = \frac{3}{2}$ est $f'(x) = 0$
- La dérivée de $f(x) = -5$ est $f'(x) = 0$

2. Dérivées de la forme ax

Fondamental : Dérivée de la forme f(x)=ax

La dérivée d'une fonction de la forme $f(x) = ax$ est $f'(x) = a$.

Exemple

- La dérivée de $f(x) = 3x$ est $f'(x) = 3$
- La dérivée de $f(x) = -7x$ est $f'(x) = -7$
- La dérivée de $f(x) = \dfrac{2}{5}x$ est $f'(x) = \dfrac{2}{5}$
- La dérivée de $f(x) = \dfrac{-3x}{4}$ est $f'(x) = \dfrac{-3}{4}$

3. Dérivées d'une puissance

On a déjà rencontré un cas simple de fonction puissance avec la fonction carré. On va admettre la formule suivante qui permet de généraliser le calcul de la dérivée dans le cas d'une puissance quelconque.

Fondamental

La dérivée d'une fonction de la forme $f(x) = x^n$ est $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple

- La dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$
- La dérivée de $f(x) = x^4$ est $f'(x) = 4x^3$
- La dérivée de $f(x) = -x^3$ est $f'(x) = -3x^2$

4. Dérivée de la fonction racine

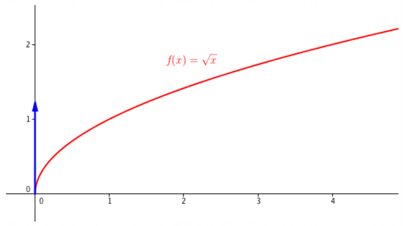
Fondamental

La fonction $f\ : x \longmapsto \sqrt{x}$ est **définie** sur $[0\,;+\infty[$

f est **dérivable** sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque

On fera attention au fait que l'intervalle de définition de f n'est pas le même que celui sur lequel f est dérivable. En effet, **la fonction racine n'est pas dérivable en 0**.



Géométriquement, on peut interpréter ce phénomène en remarquant que la **tangente en 0 à la courbe est verticale**. Celle-ci n'a donc pas de pente et n'a pas d'équation réduite de la forme $y = ax + b$.

C. Rappels sur les opérations sur les dérivées

1. Dérivée d'une somme

a) Dérivée d'une somme

Définition

La dérivée d'une fonction de la forme $U + V$ est $U' + V'$.

Exemple

- La dérivée de $f(x) = 4x - 3$ est $f'(x) = 4$
- La dérivée de $f(x) = x^2 - 7x + 3$ est $f'(x) = 2x - 7$
- La dérivée de $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ est $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$

2. Dérivée d'un produit d'une fonction par une constante

a) Dérivée d'un produit d'une fonction par une constante

Définition

La dérivée d'une fonction de la forme kU est kU'

Exemple

- La dérivée de $f(x) = 4x$ est $f'(x) = 4 \times 1 = 4$
- La dérivée de $f(x) = 3x^2$ est $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$
- La dérivée de $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ est $f'(x) = -3x^2 + 2 \times 2x - 5 = -3x^2 + 4x - 5$
- La dérivée de $f(x) = \frac{x^3}{3}$ est $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$ car $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{1}{3}x^3$.

3. Dérivée d'un produit

a) Dérivée d'un produit

Définition

La dérivée d'une fonction de la forme $U \times V$ est égale à $U' \times V + U \times V'$

Exemple

- La dérivée de $f(x) = x(3x - 5)$ est
  $f'(x) = 1(3x - 5) + x(3) = 3x - 5 + 3x = 6x - 5$

  On a posé
  - $U(x) = x$ donc $U'(x) = 1$ et
  - $V(x) = 3x - 5$ donc $V'(x) = 3$

  Voir ici une correction animée (cf. Dérivée d'un produit p 31).

4. Fractions simples

a) Dérivée d'un fraction simple

Définition

La dérivée de $\frac{1}{V}$ est $\frac{-V'}{V^2}$

Exemple

- La dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$ est égale à $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
- La dérivée de $f(x) = \frac{1}{2x}$ est égale à $f'(x) = \frac{-2}{(2x)^2} = \frac{-2}{4x^2} = \frac{-1}{2x^2}$

5. Fractions

a) Dérivée d'un fraction

Définition

La dérivée de $\dfrac{U}{V}$ est $\dfrac{U' \times V - U \times V'}{V^2}$

Exemple

- La dérivée de $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$ est égale à
  $f'(x) = \dfrac{(2)(x-2)-(2x-1)(1)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x-4-2x+1}{(x-2)^2} = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$
  Voir une correction animée (cf. Dérivée d'une fraction p 31)
- La dérivée de $f(x) = \dfrac{x}{3x-2}$ est égale à
  $f'(x) = \dfrac{(1)(3x-2)-(x)(3)}{(3x-2)^2} = \dfrac{3x-2-3x}{(x-2)^2} = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$
  $f'(x) = \dfrac{3x-2-3x}{(x-2)^2} = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

D. Dérivée de f(ax+b)

Méthode

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et soient a et b deux nombres réels

Alors la fonction dérivée de $f(ax+b)$ est $a \times f'(ax+b)$

Exemple

La dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ est $f'(x) = 3 \times \dfrac{-1}{(3x+2)^2}$

Exemple

La dérivée de $f(x) = \sqrt{2-5x}$ est $f'(x) = -5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{2-5x}}$

Attention

Cette formule ne s'applique que dans le cas où la fonction contenue dans *f* est une fonction affine.

On ne peut pas utiliser cette formule pour dériver $f(x) = \sqrt{2 - 5x^2}$

E. Dérivée d'une puissance

1. Dérivée d'une puissance

Définition

La dérivée d'une fonction de la forme U^n est égale à $nU^{n-1} \times U'$

Exemple

- La dérivée de $f(x) = (2x^2 - 7)^3$ est
  $f'(x) = 3(2x^2 - 7)^2 \times 4x = 12x(2x^2 - 7)^2$
  - On pose $U(x) = 2x^2 - 7$ donc $U'(x) = 2x$

F. Dérivée d'une racine

1. Dérivée d'une racine

Définition

Si $x \longmapsto U(x)$ est une fonction **dérivable** et **strictement** positive sur un intervalle I, alors $x \longmapsto \sqrt{U(x)}$ est dérivable sur I et on a :

La dérivée d'une fonction de la forme $\sqrt{U}$ est égale à $\dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$

Exemple

- f est dérivable sur tout intervalle où $5x^2 - 7 > 0$ donc sur $\left]-\infty\,;-\sqrt{\frac{7}{5}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{7}{5}}\,;+\infty\right[$
- La dérivée de $f(x) = \sqrt{5x^2 - 7}$ est
- $f'(x) = \dfrac{10x}{2\sqrt{5x^2 - 7}}$
  - On pose $U(x) = 5x^2 - 7$ donc $U'(x) = 10x$

* *
*

En fait, on peut généraliser ces résultats à un peu tout type de fonctions en remarquant qu'à chaque fois un U' apparaît en facteur de l'expression.

Plus généralement, on admettra le résultat que la dérivée de $f(U(x))$ est $U'(x) \times f'(U(x))$

Tester ses connaissances

IV

Pour ce test d'auto-évaluation final, vous devez obtenir un minimum de 80% de bonnes réponses. En cas d'échec, révisez la section du cours qui vous a posé des difficultés et retentez à nouveau le test.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [-3 ;5] par :

- $f(x) = 1 - x$ *si* $x \in [-3\,;0]$
- $f(x) = x^2 + 5x + 1$ *si* $x \in [0\,;1]$
- $f(x) = e^{x-1} + 6$ *si* $x \in]1\,;3]$
- $f(x) = 13,3890$ *si* $x \in]3\,;5]$

☐	La fonction f est continue sur [-3 ;1].
☐	La fonction f est continue sur [-3 ;3].
☐	La fonction f est continue sur [-3 ;5].

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur [1 ;3] par :

$f(x) = x + 3$ *si* $0 \le x \le 1$

$f(x) = p \times x^2$ *si* $1 < x \le 3$

Quelle valeur doit-on donner au réel p *pour que la fonction* f *soit continue sur [0 ;3] ?*

Exercice 3 : Utilisation directe du TVI

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
			0				5
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-2		

Exercice

L'équation $f(x) = 7$ *admet :*

- ◯ 0 solution
- ◯ 1 solution
- ◯ 2 solutions
- ◯ 3 solutions

Exercice

L'équation $f(x) = -5$ *admet :*

- ◯ 0 solutions
- ◯ 1 solution
- ◯ 2 solutions
- ◯ 3 solutions

Exercice

L'équation $f(x) = -0,5$ *admet :*

- ◯ 0 solution
- ◯ 1 solution
- ◯ 2 solutions
- ◯ 3 solutions

Exercice 4

La fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ *par* $f(x) = \sqrt{4x^2-1}$ *a pour fonction dérivée :*

- ○ $f' : x \longmapsto \dfrac{-8x}{2\sqrt{4x^2-1}}$
- ○ $f' : x \longmapsto \dfrac{8x}{\sqrt{4x^2-1}}$
- ○ $f' : x \longmapsto \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}$

Exercice 5

La fonction f définie sur $]-2\,;+\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^4}$ *a pour fonction dérivée*

- ○ $f' : x \longmapsto \dfrac{-4}{(x+2)^5}$
- ○ $f' : x \longmapsto \dfrac{-4}{(x+2)^3}$
- ○ $f' : x \longmapsto \dfrac{4}{(x+2)^5}$

Exercice 6

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$. *Alors*

- ○ $f'(0)$ n'existe pas
- ○ $f'(0) = 1$
- ○ $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

Ressources annexes

- Dérivée d'un produit

anim_derivee_produit.swf

- Dérivée d'une fraction

anim_derivee_fraction_1.swf

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 8)

Pour un revenu annuel de 6000 €

On applique la formule correspondant à la tranche de 5963€ - 11896€ : $R \times 0,055 - 327,97 \times N$ avec $R = 6000$ et $N = 1$ ce qui donne un impôt de 2,03 € !

Rien de bien étonnant à cela, 6000 étant juste au dessus du seuil où l'on commence à payer. Pour une certaine équité, il faut assurer une **continuité** au niveau des barèmes afin **de ne pas avoir de saut pour quelques euros gagnés en plus** par an.

Pour un revenu annuel de 20000 €

On applique la formule correspondant à la tranche de 11896€ - 26420€ : $R \times 0,14 - 1339,13 \times N$ avec $R = 20000$ et $N = 1$ ce qui donne un impôt de 1460,87 € !

> Solution n°2 (exercice p. 8)

20000=5963+5933+8104

5933*0,055=326,31

8104*0,14=1134.56

0+326,31+1134,56=1460,88

On retrouve ainsi par cette décomposition des revenus en tranches la somme exacte trouvée dans la question précédente en utilisant la formule donnée par les impôts. Cela nous éclaire donc sur la notion de tranches d'imposition. Le taux d'imposition de la tranche n'est appliqué que sur la part des revenus présents dans la tranche et non la totalité !

> Solution n°3 (exercice p. 8)

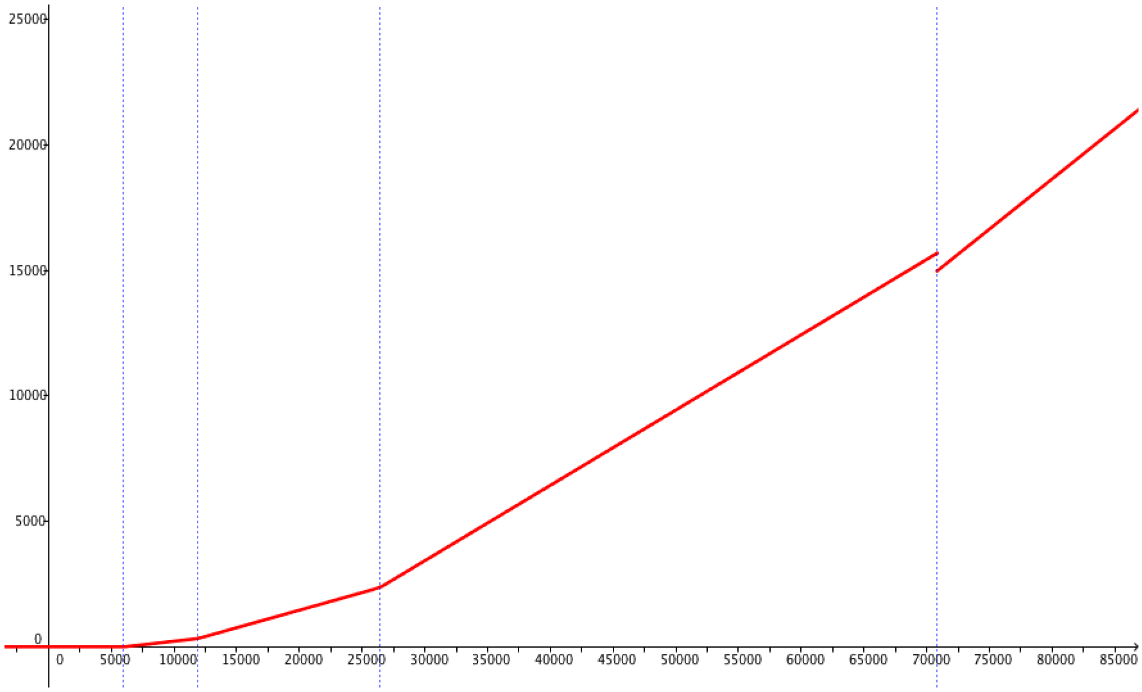
Les 30000 € se répartissent ainsi :

- 0% pour les 5963 premiers euros
- 5,5% pour les 5933 euros suivants
- 14% pour les 14524 euros suivants
- 30% pour les 3580 euros restants.

> Solution n°4 *(exercice p. 8)*

Bien sur que non ! L'impôt est progressif. La tranche d'imposition supérieure n'aurait été appliquée que sur la partie qui dépasse le seuil de la tranche et non sur la totalité de la somme gagnée.

> Solution n°5 *(exercice p. 8)*



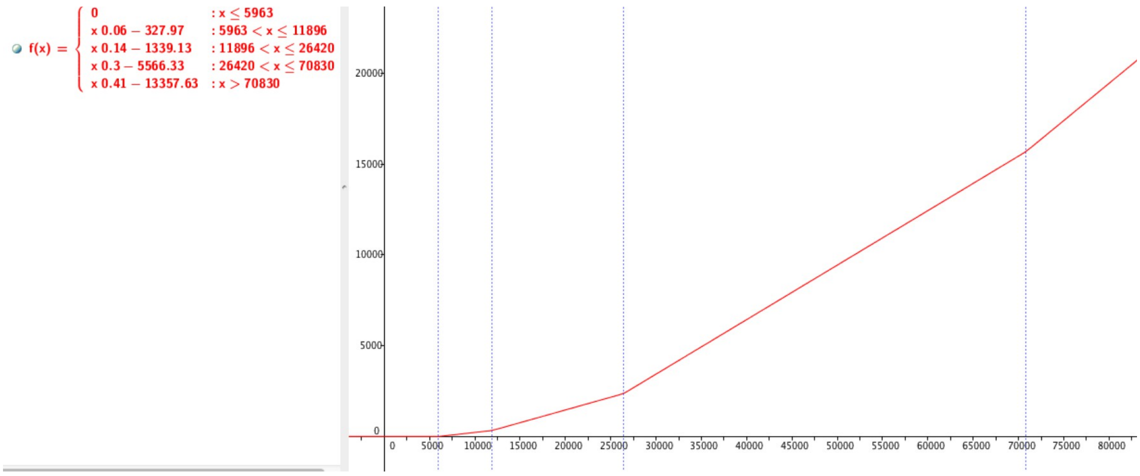
Remarque

On observe sur les 4 premières tranches une parfaite **continuité** de la courbe ce qui traduit la progressivité de l'impôt dont on a parlé aux questions précédentes.

Néanmoins sur la dernière tranche, une **discontinuité** apparaît à la hauteur de 70830 €. Cela traduit une **anomalie** sur le document officiel des impôts : il est en effet injuste qu'une personne gagnant 70831 €/an paye moins d'impôts qu'une personne touchant 70829 €/an !

> Solution n°6 *(exercice p. 9)*

Une manière de corriger la courbe est de remplacer le taux de 0,4 dans la formule par 0,41 : la dernière tranche étant à 41% et non 40% comme le laisse penser l'entête de l'extrait du document des impôts. En utilisant la formule $R \times 0,41 - 13357,63 \times N$, la courbe devient de nouveau continue sur l'ensemble des revenus.



> Solution n°7 *(exercice p. 10)*

La fonction n'est pas continue sur l'intervalle]0 ;+∞[car pour la tracer, on doit lever le crayon en *x=400*, *x=600* et *x=1200*.

> Solution n°8 *(exercice p. 10)*

- *f(x)=3* si *0<x<400*
- *f(x)=6* si *400≤x<600*
- *f(x)=8* si *600≤x<1200*
- *f(x)=10* si *x≥1200*

> Solution n°9 *(exercice p. 11)*

Recherche de l'ensemble de définition

Le premier problème qui se pose est au niveau du quotient. Le dénominateur *2x+3* **ne peut pas s'annuler**. Nous avons donc une valeur interdite lorsque $2x + 3 = 0$ donc $x = \dfrac{-3}{2}$.

Le second problème qui se pose est au niveau de la racine. **L'intérieur de la racine doit être positif ou nul**. Nous devons donc déterminer le signe de $\frac{-x+2}{2x+3}$ au moyen par exemple d'un tableau de signes.

Dans ce tableau nous faisons apparaître en première ligne les valeurs qui annulent le numérateur et le dénominateur. On applique la règle des signes pour déterminer le signe du quotient. la valeur interdite est symbolisée par la double barre.

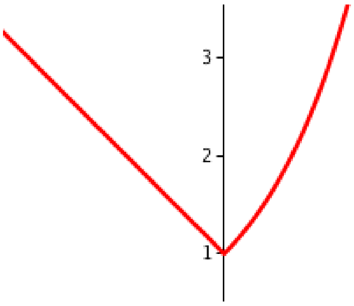
x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Tenant compte de ces contraintes, on s'aperçoit que la fonction est définie sur l'intervalle $]\frac{-3}{2}\,;2]$.

La fonction étant composée de fonctions usuelles, (racine et quotient de polynômes), elle est donc continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie. Elle est donc continue sur l'intervalle $]\frac{-3}{2}\,;2]$.

> Solution n°10 (exercice p. 11)

En déplaçant le curseur, on s'aperçoit que pour *p=1*, la fonction semble bien être continue.



> Solution n°11 (exercice p. 12)

Pour que la fonction soit continue en 0, il faut que $-x+p$ ait en 0 la même valeur que e^x d'où l'équation : $-0+p=e^0$ qui nous donne directement le résultat cherché : $p=1$.

Par conséquent la fonction *f* définie par :

- *f(x)=e^x* si *x≥0*
- *f(x)=-x+1* si *x<0*

est continue sur $\mathbb{R}$

> Solution n°12 (exercice p. 15)

La fonction *f* est une fonction usuelle (polynôme) sans problème particulier. Elle est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Pour déterminer ses variations, on s'intéresse au signe de sa dérivée : $f'(x)=3x^2+1$.

Un carré étant toujours positif, la dérivée *f′* est toujours **strictement positive** et la fonction *f* est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

> Solution n°13 *(exercice p. 15)*

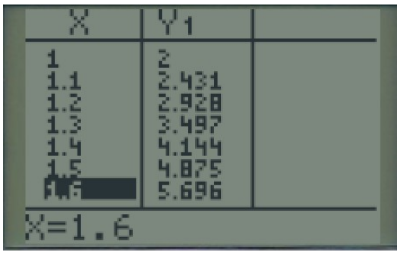
- La fonction *f* est **continue**
- La fonction *f* est **strictement croissante** sur *[1 ;2]*
- *f(1)=2* et *f(2)=8+2=10* donc $f(1) < 5 < f(2)$

x	1	2
$f(x)$	2 ↗	10

Cela nous permet d'établir le tableau de variations ci-contre.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet donc d'affirmer qu'il existe une unique solution $c \in [1\,;2]$ tel que *f(c)=5*.

> Solution n°14 *(exercice p. 15)*



L'écran ci-contre reproduit le tableau de valeurs affiché par la calculatrice **entre 1 et 2** avec **un pas de 0,1**

On y voit clairement apparaître que la solution *c* cherchée est **comprise entre 1,5 et 1,6** puisque *f(1,5)<5<f(1,6)*.

Complément : Plus de précision ?

Si on cherche une valeur approchée plus précise de la solution, on utilisera à nouveau la fonction table entre *1,5* et *1,6* avec un pas de *0,01* et ainsi de suite.

> Solution n°15 *(exercice p. 16)*

Sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$, d'après le tableau de variations, $f(x) \geqslant 1$. Donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solutions sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[0;2[$, d'après le tableau de variations, la fonction est continue et strictement décroissante.

De plus, $0 \in]-\infty\,;2]$

Donc d'après le *TVI*, l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $]2;+\infty[$, d'après le tableau de variations, la fonction est continue et strictement croissante.

De plus, $0 \in]-\infty\,;1]$

Donc d'après le *TVI*, l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution sur cet intervalle.

Ainsi, au total, l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

> Solution n°16 *(exercice p. 16)*

Calcul de la dérivée

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

Résolution de l'équation f'(x)=0

Cherchons les racines du polynôme $3x^2 + 2x - 1$:

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{6} = \frac{1}{3}$$

Le coefficient dominant est positif donc **f' est positive en dehors des racines**

Tableau de variations

On calcule les valeurs de la fonction

- $f(-2) = -1$
- $f(-1) = 2$
- $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{22}{27}$
- $f(2) = 11$

On en déduit le tableau de variations suivant

x	-2		-1		$\frac{1}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↗	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗	11

> Solution n°17 *(exercice p. 16)*

Sur [-2 ;2], le tableau de variations montre que le **minimum** de la fonction est -1 et le **maximum** est 11.

De plus la fonction *f* est un polynôme donc **continue** sur $\mathbb{R}$

Donc pour tout réel $k \in [-1\,;11]$, d'après le TVI, l'équation f(x)=k admet au moins une solution.

> Solution n°18 *(exercice p. 16)*

	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5
A	-2	-2	-2	-1,875	-1,875
B	-1	-1,5	-1,75	-1,75	-1,8125
M	-1,5	-1,75	-1,875	-1.8125	-1.84375
f(A)	-1	-1	-1	-0,2	
f(M)	1,375	0,45	-0,2	0,14	
(B-A)	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

A l'étape 5, (B-A) est inférieur à la précision de 0,1 demandée donc on sort de la boucle.

La valeur affichée par l'algorithme est la valeur de M donc -1,84375

> Solution n°19 *(exercice p. 16)*

Cet algorithme sert à déterminer une valeur approchée à la précision P de la solution à l'équation f(x)=0.

On commence par initialiser les bornes de l'intervalle de recherche : Ici on recherche la solution dans l'intervalle [-2 ;-1]. L'existance d'une solution unique dans cet intervalle nous est donnée par le tableau de variation calculé à la première question.

La méthode consiste ensuite à diviser à chaque étape par deux la longueur de l'intervalle en calculant dans la variable M le centre de ce dernier.

On réitère le procédé en prenant pour intervalle de recherche

- [M ;B] si f(A) et f(M) sont de même signe (ce qui nous dit que la solution cherchée n'est pas dans [A ;M])
- [A ;M] si f(A) et f(M) sont de signe contraire (ce qui nous dit que la solution cherchée est dans [A ;M])

La boucle s’arrête lorsque l'intervalle de recherche a une longueur inférieure à la précision P recherchée.

> Solution n°20 *(exercice p. 17)*

Version Python

La valeur retournée est -1.83926 qui est une valeur approchée de la solution de l'équation f(x)=0 à 0,0001 près.

Sur calculatrice Casio

```
Table Func  :Y=
Y1■X^3+X²-X+1    [—]
```

On programme la fonction dans **Y1** comme pour faire une table de valeur pour plus de commodité dans l'écriture du programme.

```
======DICHO   ======
-2→A↵
-1→B↵
-1.5→M↵
.0001→P↵
While B-A>P↵
If Y1(M)×Y1(A)>0↵
Then ↵
M→A↵
Else ↵
M→B↵
IfEnd↵
(A+B)÷2→M↵
WhileEnd↵
M◢
```

Voici le programme pour Casio.

La difficulté dans la saisie de ce programme est l'accès à la fonction **Y1**. Celui-ci se fait via le menu VARS - GRPH (F4) qui affiche le menu suivant :

```
Y  r  Xt  Yt  X
```

Le **Y1** se fait alors par la touche F1 suivie de 1

Complément : Sur calculatrice TI

Le programme est pratiquement identique. Vous l'adapterez sans difficulté, sauf pour l'accès à la fonction **Y1**...

Comme pour Casio, on stocke la fonction dans la liste des fonctions comme pour un tableau de valeur.

```
VARS Y-VARS
1■Function...
2:Parametric...
3:Polar...
4:On/Off...
```

L'accès à **Y1** depuis l'éditeur de programme se fait par la touche VAR puis onglet **Y-VARS** premier choix puis sélectionner la fonction.