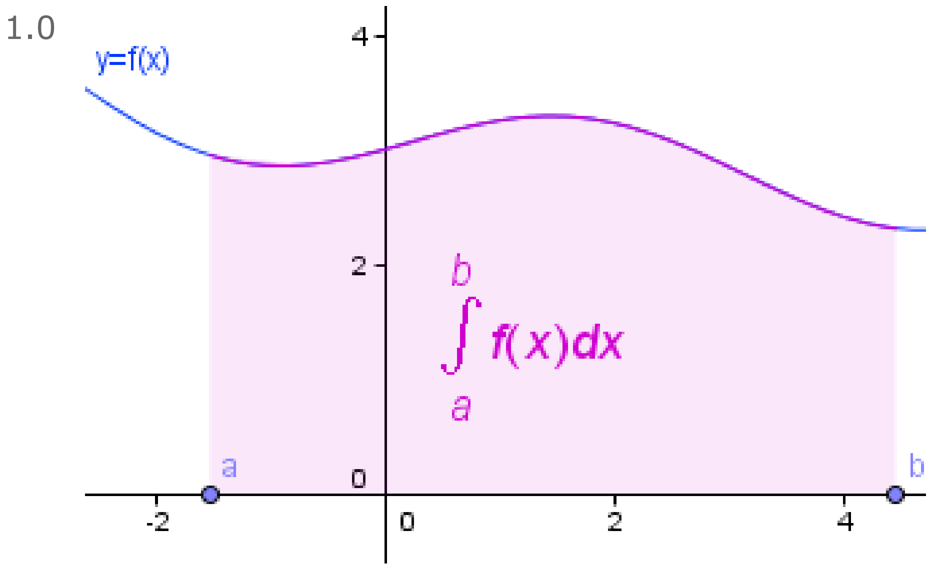
Terminale S

Intégrales et primitives



Olivier Lecluse

Décembre 2013

Table des matières

Objectifs

Dans ce chapitre, nous aborderons les notions suivantes

- Notion d'intégrale d'une fonction continue
- Notation intégrale
- Lien entre primitive et dérivées
- Calcul de primitives
- Propriétés de l'intégrale
- Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Introduction

Le calcul de l'aire d'une surface a été l'un des moteurs dans la mise en place des concepts mathématiques. Beaucoup de grands mathématiciens se sont penchés sur ce problème, depuis Archimède qui calcula l'aire de la surface située sous une parabole, Bonaventura Cavalieri qui développa sa théorie des indivisibles, Gilles de Roberval qui calcula l'aire sous une arche de cycloïde, Gottfried Leibniz qui utilisa pour la première fois le symbole $\int$, jusqu'à Bernhard Riemann qui établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Aujourd'hui, le calcul intégral permet :

- de mesurer des grandeurs (longueur d'une courbe, aire, volume, flux...). La *trompette de Toricelli*[1] fourni un exemple de calcul d'aire et de volume avec cet objet incroyable possédant un volume fini mais une aire infinie !
- de calculer des probabilités et des statistiques (c'est l'outil de base que nous utiliserons dans le chapitre des lois continues)
- de résoudre des équations différentielles omniprésentes en mathématiques et en physique (mouvement, quantité d'énergie, ondes, mécanique quantique...)

Son utilisation est très fréquente dans le monde de l'industrie (automatisme, électronique). C'est donc un outil incontournable pour comprendre le monde qui nous entoure.

Dans ce marathon intellectuel qui s'apparente plus à une course de relais vers le calcul infinitésimal, les mathématiciens étaient en compétition pour trouver une méthode générale pour calculer des aires et des volumes de figures courbes. L'idée grecque était d'approcher une figure courbe par des polygones inscrits. En essayant d'améliorer peu à peu l'approche, ils employaient un nombre croissant de côtés. Cette approche grecque antique s'appelle "la méthode d'exhaustion."

La géométrie analytique a montré l'intérêt de cette méthode d'exhaustion et lui a permis d'analyser des problèmes d'aire et de volume grâce aux équations algébriques. Ceci a conduit au développement graduel d'une nouvelle et puissante discipline maintenant appelée calcul intégral.

En même temps, les questions de vitesse, d'accélération et le comportement des quantités variables a conduit au développement d'une nouvelle branche des mathématiques appelée calcul différentiel. Le calcul différentiel et intégral fut une combinaison d'idées provenant de nombreuses sources, avec

- Oresme,
- Galilée,
- Kepler,
- Descartes,
- Fermat,
- Torricelli,
- et Isaac Barrow qui a partagé ses idées
- avec Isaac Newton.

Construisant sur les bases établies par ces pionniers, Isaac Newton et Wilhelm Leibniz

1 - http://fr.wikipedia.org/wiki/Trompette_de_Gabriel

achevèrent cette course vers l'analyse... en une finale controversée, avec photo finish. Voici une de leurs découvertes principales. Prenez n'importe quelle fonction et utilisez l'intégrale pour calculer l'aire sous son graphe. Ceci vous donne une nouvelle fonction appelée la fonction aire. Calculez maintenant la dérivée ou le taux d'accroissement de la fonction aire. Et voilà que le résultat est la fonction originale ! Ce lien remarquable entre l'intégrale et la dérivée est devenu un outil inestimable, faisant de l'analyse la langue commune de la science et qui inaugura une nouvelle ère dans l'histoire des mathématiques.

I

Intégrale d'une fonction continue positive

A. Activité de découverte

On considère dans cette activité la fonction *f* définie sur [0 ;2] par $f(x) = 4 - x^2$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

L'objectif de cette activité est de déterminer l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses. Pour cela, on aura recours à la simulation géogébra suivante :

Simulateur

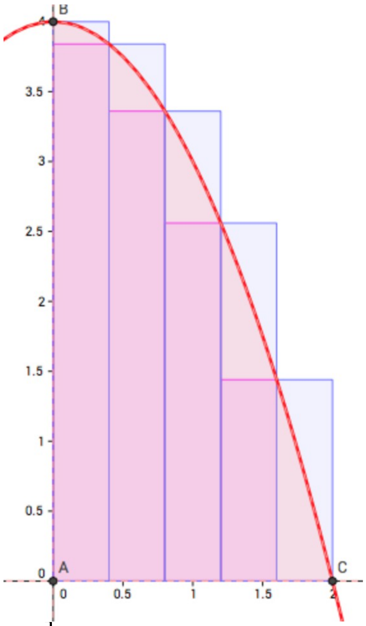
Pour approcher l'aire sous la courbe, on l'encadre à l'aide de rectangles : une série situés à l'intérieur de la courbe et une autre à l'extérieur. La somme des aires de ces rectangles permet de connaître un encadrement de l'aire sous la courbe comme le montre l'animation suivante :

On s'aperçoit que plus le nombre de rectangles est grand, plus l'encadrement de l'aire obtenu est précis. On obtient ainsi avec 250 rectangles une aire comprise entre 5,32 et 5,35 unités d'aire.

B. Activité algorithmique

Nous cherchons dans cette activité à améliorer la précision du calcul de l'aire précédente. Pour ce faire, nous allons utiliser un algorithme que nous pourrons programmer sur ordinateur ou calculatrice.

On considère la fonction $f\ :x\longmapsto 4-x^2$ définie, continue et positive sur l'intervalle $[0\,;2]$.
On sépare l'intervalle $[0\,;2]$ en n intervalles de longueur $\frac{2}{n}$ chacun :



$$\left[0\,;\frac{2}{n}\right]\ \left[\frac{2}{n}\,;\frac{4}{n}\right]\ \dots\ \left[k\frac{2}{n}\,;(k+1)\frac{2}{n}\right]\ \dots\ \left[(n-1)\frac{2}{n}\,;2\right]$$

- On appelle S_1 la somme des rectangles *sous la courbe* s'appuyant sur les *n* intervalles définis ci-dessus
- On appelle S_2 la somme des rectangles *sur la courbe* s'appuyant sur les *n* intervalles définis ci-dessus

L'*activité précédente* montre à l'aide de géogébra que pour $n=250$, $S1\approx 5,32$ et $S_2\approx 5,35$

Question 1

[Solution n°1 p 41]

Soit *k* un entier compris entre 0 et $(n-1)$

On considère l'intervalle $\left[k\frac{2}{n}\,;(k+1)\frac{2}{n}\right]$.

En s'appuyant sur la construction précédente, sur cet intervalle,

- quelle est l'aire du rectangle situé sous la courbe ?
- quelle est l'aire du rectangle situé sur la courbe ?

Indice :

La fonction f est décroissante sur $[0\,;2]$

Question 2

[Solution n°2 p 41]

Écrire un algorithme prenant en entrée le nombre *n* de subdivisions de l'intervalle $[0\,;2]$ et affichant en sortie les valeurs de S_1 et S_2 ainsi que la largeur de l'encadrement de l'aire obtenu.

Indices :

On pourra utiliser deux variables S1 et S2 pour stocker les sommes recherchées.

Une boucle pour semble bien adaptée car on sait dès le départ le nombre n d'itérations nécessaires.

Question 3

[Solution n°3 p 41]

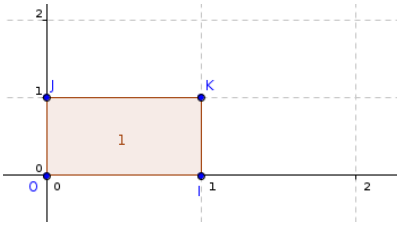
Programmer cet algorithme sur calculatrice ou ordinateur et retrouver les résultats donnés par géogébra.

Question 4

[Solution n°4 p 42]

En utilisant votre programme, donner une valeur approchée à 10^{-2} de la valeur de l'aire sous la courbe C_f entre $x = 0$ et $x = 2$

C. Notion d'intégrale



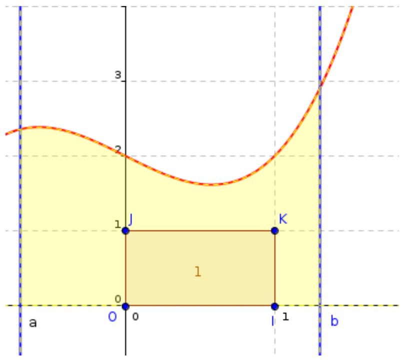
Soit (O,I,J) un repère orthogonal du plan. L'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ comme indiqué sur la figure ci-contre.

Définition : Intégrale d'une fonction

Soit *a* et *b* deux réels et *f* une fonction **continue** et **positive** sur l'intervalle $[a\,;b]$. C désigne sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O,I,J)

L'intégrale de f entre a et b est l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On note ce nombre $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$



Exemple

Dans l'exemple de l'*activité*, on peut dire que $\displaystyle 5,32 < \int_0^2 4 - x^2\,dx < 5,35$

Remarque

Dans la notation intégrale, la variable x peut être remplacée par n'importe quelle lettre : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ équivaut à $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f(u)\,du$

Le symbole $\displaystyle\int$ a été introduit par Leibniz au XVIIè siècle. Il représente un S stylisé, faisant référence à la **S**omme de tous les petits rectangles utilisés dans l'activité pour approcher l'aire sous la courbe.

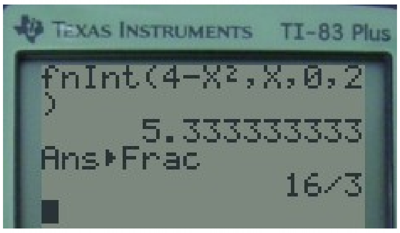
D. Utiliser la calculatrice pour calculer une intégrale

Reprenons l'exemple de l'*activité* précédente et calculons à l'aide de la calculatrice la valeur de $\int_0^2 4 - x^2 \, dx$

1. Sur calculatrice TI

Méthode

La fonction intégrale se trouve dans le menu $\boxed{\text{MATH}}$ sous la dénomination *fnInt(*



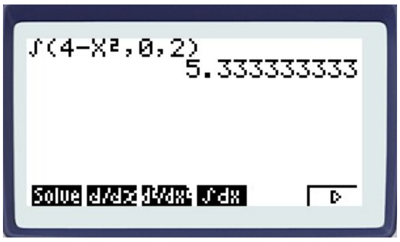
Les arguments à passer à la fonction fnint(sont dans l'ordre

- la fonction
- la variable (X en général)
- la première borne de l'intervalle (a)
- la seconde borne de l'intervalle (b)

On obtient donc $\int_0^2 4 - x^2 \, dx = \frac{16}{3}$

2. Sur calculatrice Casio

Méthode



La fonction intégrale se trouve en mode calcul dans le menu $\boxed{\text{OPTN}}$ / $[CALC]$ / $[\int dx]$ (à coté de la fonction dérivée).

Les arguments à passer à la fonction sont dans l'ordre

- la fonction
- la première borne de l'intervalle (a)
- la seconde borne de l'intervalle (b)

On obtient donc $\int_0^2 4 - x^2\,dx \approx 5,33$

E. Première méthode pour calculer une intégrale dans le cas d'une fonction affine

Nous allons calculer notre première intégrale pour une fonction simple : une fonction affine.

On définit $f\ : x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 5$ et on note Cf sa courbe représentative.

Question 1

[*Solution n°5 p 42*]

Hachurer sur un graphique l'aire représentée par $\int_{-1}^{3} -\frac{1}{2}x + 5\,dx$

Indice :

Il faut dessiner la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 5$ *mais aussi* $x = -1$ *et* $x = 3$

Question 2

[*Solution n°6 p 43*]

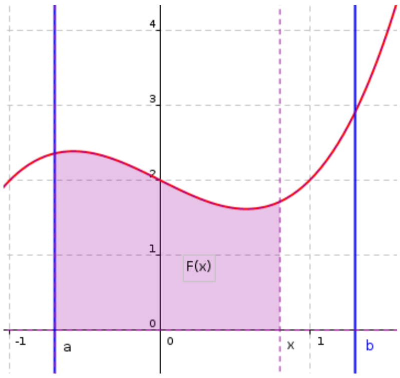
Calculer $\int_{-1}^{3} -\frac{1}{2}x + 5\,dx$

Indices :

On pourra utiliser le graphique réalisé et les connaissances de géométrie de base.

L'aire d'un trapèze est $\frac{(Petite\ base + Grande\ base) \times Hauteur}{2}$

F. Vers la notion de primitive d'une fonction



Soit *a* et *b* deux réels et *f* une fonction **continue** et **positive** sur l'intervalle $[a\,;b]$. C désigne sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O,I,J).

Pour tout réel $x \in [a\,;b]$, on peut définir la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ comme étant l'aire sous la courbe C sur l'intervalle $[a; x]$.

Remarque

La fonction *F* est définie sur [a ;b] et :

- $F(a) = 0$ puisque l'aire sur un domaine de largeur nulle est nulle.
- $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent : $f\ : x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 5$.

On a alors $F(x) = \int_{-1}^x -\frac{1}{2}t + 5\,dt$

Si on utilise la méthode de l'aire du trapèze pour calculer cette intégrale, nous avons :

$$\mathcal{A} = \frac{(f(x) + 5,5)}{2} \times (x+1) = (-\frac{x}{2} + 5 + 5,5) \times \frac{x+1}{2}$$

$$\mathcal{A} = -\frac{x^2}{4} + \frac{10,5x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{10,5}{2}$$

$$\mathcal{A} = -\frac{x^2}{4} + 5x + 5,25$$

On vérifie que :

$F(-1) = -0,25 - 5 + 5,25 = 0$

et

$F(3) = -2,25 + 15 + 5,25 = 18$ ce qui est l'aire obtenue à l'exercice précédent.

Remarque : Avec l'exemple précédent,

On remarque à ce stade que si $f(x)$ est une fonction affine, $F(x)$ est un polynôme du second degré.

Une surprise nous attend si on calcule $F'(x)$: $F'(x) = -\frac{x}{2} + 5 = f(x)$! ! ! !

Ce résultat n'est pas le fruit du hasard mais se généralise au moyen de la propriété suivante :

Fondamental : Théorème admis dans le cas général

Soit *a* et *b* deux réels et *f* une fonction **continue** et **positive** sur l'intervalle $[a\,;b]$.

La fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a\,;b]$, a pour **dérivée** f et s'annule pour $x = a$.

Complément

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, il suffit de connaître une fonction *F* dérivable dont la dérivée est f. Nous aurons alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

G. ROC : Lien entre intégrale et primitive

Soit *a* et *b* deux réels et *f* une fonction **continue** et **positive** sur l'intervalle $[a\,;b]$.

La fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour **dérivée** f.

Nous allons démontrer ce théorème dans le cas particulier où *f* est en plus **croissante** sur $[a\,;b]$

Question 1

[*Solution n°7 p 43*]

Soit *f* une fonction **continue**, **positive** et **croissante** sur $[a\,;b]$ et $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Soit $x_0 \in [a\,;b]$ et *h* un réel tel que $x_0 + h \in [a\,;b]$

Montrer que si $h > 0, f(x_0) \leqslant \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$

Question 2

[*Solution n°8 p 43*]

Montrer que si $h < 0, f(x_0+h) \leqslant \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$

Question 3

[*Solution n°9 p 43*]

En déduire que *F* est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$

Nous avons donc démontré le théorème fondamental reliant intégrales et primitives dans le cas particulier d'une fonction croissante.

Ce théorème reste vrai dans le cas d'une fonction non monotone sur un intervalle [a ;b]

H. Seconde méthode pour calculer une intégrale

On définit $f\ : x \longmapsto 2x - 3$.

On cherche à calculer $\int_2^4 2x - 3\,dx$ en utilisant le théorème vu au paragraphe précédent.

Question 1

[Solution n°10 p 44]

Chercher une fonction $F(x)$ dont $f(x)$ est la dérivée.

Indice :

On pourra chercher dans la famille des polynômes du second degré car la dérivée d'un polynôme du second degré est une fonction affine.

Question 2

[Solution n°11 p 44]

En déduire la valeur de $\int_2^4 2x - 3\,dx$

Indice :

On se rappelle que si on connaît une fonction F *dérivable dont la dérivée est* f*, nous avons* $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Notion de primitive

II

A. Définition

Nous avons vu qu'une manière de calculer les intégrales était de s'appuyer sur une fonction dont on connaissait la dérivée, et donc en quelque sorte, de *faire le processus de dérivation à l'envers*. Nous allons formaliser cette démarche dans cette section au moyen de la notion de primitives d'une fonction.

Définition : Primitive

Soient *a* et *b* deux réels et f une fonction continue définie sur l'intervalle $[a\,;b]$.
On appelle primitive de f sur $[a\,;b]$ toute fonction F dérivable sur l'intervalle $[a\,;b]$ telle que pour tout $x \in [a\,;b], F'(x) = f(x)$.

Exemple

Soit $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Une primitive de *f* est $F(x) = x^3 + x^2 + x$ car $F'(x) = f(x)$.

Mais une autre primitive de f est $G(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ car $G'(x) = f(x)$. On ne peut donc pas parler de **la** primitive d'une fonction mais **d'une** primitive. La propriété suivante explicite ce phénomène :

Fondamental

Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$, alors toutes les primitives de f sont du type $F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$. Les primitives se définissent donc à une constante près.

B. Existence de primitives

Peut-on toujours calculer une primitive ? Sous quelles conditions existent-elles ? La propriété suivante fixe un premier critère très simple.

Fondamental : Primitive d'une fonction continue (admis dans le cas général)

Toute fonction **continue** sur un intervalle **admet des primitives** sur cet intervalle.

Complément : Démonstration ROC

La démonstration de ce théorème fondamental sur un intervalle [a ;b] fait l'objet d'une ROC.

Attention

Même si on est assuré dans le cas d'une fonction continue de l'existence d'une primitive, nous ne sommes pas toujours en capacité de l'expliciter à l'aide des fonctions usuelles que nous connaissons. Pour certaines fonctions, même parfois simples, nous n'avons pas possibilité de donner une primitive à l'aide de nos fonctions usuelles.

Exemple : $x \longmapsto e^{-x^2}$ admet des primitives mais nous ne pouvons les expliciter au moyen des fonctions usuelles que nous connaissons.

Contrairement au processus de dérivation qui permet toujours d'obtenir la dérivée d'une fonction lorsqu'elle existe, le calcul de primitive est moins évident et n'aboutit pas toujours à un résultat.

C. ROC : Toute fonction continue sur [a ;b] admet des primitives

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$

On **admet** qu'alors la fonction f admet un minimum $m \in [a\,;b]$

Question 1

[Solution n°12 p 45]

Démontrer que *f* admet des primitives sur $[a\,;b]$

Indice :

On séparera le cas où $m \geqslant 0$ *du cas où* $m < 0$

Question 2

[Solution n°13 p 45]

Si *F* est une primitive de *f* sur un intervalle I, démontrer que toutes les autres primitives sont de la forme $x \longmapsto F(x) + k$ où *k* est une constante réelle

Une fonction qui possède une primitive en possède donc une infinité mais elles ne diffèrent qu'à une constante près.

Par contre, si $x_0 \in I$, pour une valeur y_0 donnée, il n'existe **qu'une seule primitive** telle que $F(x_0) = y_0$

D. Montrer qu'une fonction est une primitive.

On donne deux fonctions définies sur $]-1\,;+\infty[$:

- $f\ :x\longmapsto \dfrac{3}{(x+1)^2}$
- $F\ :x\longmapsto \dfrac{2x-1}{x+1}$

Question 1

[Solution n°14 p 45]

Démontrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

Indice :

Après avoir vérifié que les fonctions sont bien définies sur l'intervalle considéré, on pourra calculer F'.

Question 2

[Solution n°15 p 45]

Montrer qu'il existe une unique primitive G de f sur $]-1\,;+\infty[$ telle que $G(0)=0$

Indice :

On se rappelle que les primitives sont définies à une constante près.

Calcul de primitives

III

Nous avons vu sur quelques exemples que le calcul de primitives nécessitait un mode de raisonnement spécifique. Nous allons voir dans cette partie quelques techniques de calcul ainsi qu'un tableau de primitives usuelles, se déduisant du tableau des dérivées usuelles par une lecture inversée.

A. Primitives de f+g et de kf (k réel)

De même que l'addition de fonction et le produit par un nombre sont des opérations *transparentes* pour la dérivation (la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, la dérivée du produit d'une fonction par un nombre et le produit par ce nombre de la dérivée de la fonction), il en va de même pour les primitives.

Méthode

Si *F* et *G* sont les primitives respectives de *f* et *g* sur un intervalle donné, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur cet intervalle.

Si *F* est une primitive de *f* sur un intervalle donné et *k* un réel, alors $k \times F$ est une primitive de $k \times f$ sur cet intervalle.

Exemple

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 8x$:

- On sait que la fonction $2x$ admet comme primitive x^2 donc $8x = 4 \times 2x$ admet comme primitive $4x^2$
- On sait que $4x^3$ admet comme primitive x^4 donc $x^3 = \frac{1}{4} \times 4x^3$ admet comme primitive $\frac{1}{4}x^4$

En faisant la somme des deux primitives obtenues, on peut dire que $\frac{1}{4}x^4 + 4x^2$ est une primitive de $x^3 + 8x$

B. Primitives de fonctions usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées et en utilisant la propriété vu précédemment, on en déduit le tableau suivant, à connaître par cœur et à ne pas confondre avec celui des dérivées !

Fondamental : Tableau de primitives usuelles

Fonction *f*	sur l'intervalle	Une primitive *F* de *f*
$f(x) = a \ (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x^3}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{2x^2}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x$

Exemple

Soit $f(x) = x^5$. D'après la formule $f(x) = x^n \ (n = 5)$ on a $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^6}{6}$.

Soit $f(x) = \frac{-1}{2x^2}$. On sait que $f(x) = -\frac{-1}{2} \times \frac{1}{x^2}$, $(n = 2)$ donc $F(x) = -\frac{1}{2}\frac{-1}{x} = \frac{1}{2x}$

Complément : Primitives de fonctions composées

De ces formules se déduisent aussi d'autres similaires faisant intervenir une fonction $u(x)$ définie et dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$

Fonction *f*	sur l'intervalle	Une primitive *F* de *f*
$f(x) = u'(x) \times u(x)$	$[a\,;b]$	$F(x) = \frac{u(x)^2}{2}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$	Un sous-intervalle de $[a\,;b]$ où *u* ne s'annule pas	$F(x) = -\frac{1}{u(x)}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	Un sous-intervalle de $[a\,;b]$ où *u* est **strictement positive**	$F(x) = \ln(u(x))$

Fonction *f*	**sur l'intervalle**	**Une primitive *F* de *f***
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	Un sous-intervalle de $[a\,;b]$où *u* est **strictement positive**	$F(x) = 2\sqrt{u(x)}$
$f(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$[a\,;b]$	$F(x) = e^{u(x)}$

Remarque

Ces formules sont identiques aux premières à la différence près que quand x est remplacé par $u(x)$, un $u'(x)$ doit être en facteur dans la fonction f de départ pour pouvoir appliquer les formules de primitives.

Exemple

Soit $f(x) = 2x(x^2 - 1)$. Posons $u(x) = x^2 - 1$. f s'écrit alors $f(x) = u'(x) \times u(x)$. Une primitive est $\dfrac{u(x)^2}{2}$.

$F(x) = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{2}$

Exemple

Soit $g(x) = (2x + 1)e^{x^2+x-3}$. $g(x)$ est du type $u' \times e^u$ avec $u(x) = x^2 + x + 3$.

Donc une primitive G est $G(x) = e^{x^2+x+3}$.

Attention

$f(x) = e^{-x^2}$ ne peut pas se calculer à l'aide de la formule $u' \times e^u$ car il n'y a pas de x en facteur de l'exponentielle.

En réalité, on démontre qu'il n'y a aucun moyen d'exprimer cette primitive au moyen des fonctions usuelles à notre disposition. Inutile donc de chercher à l'exprimer !

Cela ne veut pas dire pour autant qu'il n'existe pas de primitives ! Elles existent puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Simplement, on ne peut pas les exprimer autrement que par une intégrale du type $\displaystyle\int_0^x e^{-x^2}\,dx$

C. Calcul de primitives

Déterminer une primitive des fonctions *f* suivantes.

Question 1

[*Solution n°16 p 46*]

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 5$

Indice :

f est une fonction polynôme donc est une somme de fonctions du type x^n

Question 2

[Solution n°17 p 46]

$f(x) = \frac{5}{x^3}$

Indice :

f est une fonction du type $\frac{1}{x^n}$

Question 3

[Solution n°18 p 46]

$f(x) = 5\frac{\ln x}{x}$

Indices :

f est le produit de la fonction ln par sa dérivée.

On reconnaît du $u'(x) \times u(x)$ avec $u(x) = \ln x$

Question 4

[Solution n°19 p 46]

$f(x) = e^{-3x+1}$

Indices :

Attention au e^u. il faut faire apparaître un u' en facteur pour appliquer la formule.

$f(x) = -\frac{1}{3} \times (-3)e^{-3x+1}$

Question 5

[Solution n°20 p 47]

$f(x) = 3xe^{x^2-1}$

Indices :

Essayer de faire apparaître $u'e^u$

$f(x) = \frac{3}{2} \times 2xe^{x^2-1}$

Question 6

[Solution n°21 p 47]

$f(x) = \frac{2}{1-3x}$

Indices :

Essayer de mettre f sous la forme $\frac{u'}{u}$

$f(x) = -\frac{2}{3} \times \frac{-3}{1-3x}$

Question 7

[Solution n°22 p 47]

$f(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$

Indices :

Essayer de faire apparaître une forme $\frac{u'}{u^2}$

$f(x) = 4 \times \frac{2x}{(x^2+3)^2}$

D. Exercices corrigés en vidéo

Exemple

Calculer $\int_0^1 x(x^2+7)^5 \, dx$

Exemple

Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$

Propriétés de l'intégrale

IV

A. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Nous avons défini l'intégrale d'une fonction continue positive comme l'aire comprise sous la courbe. Nous avons ensuite vu un outil - les primitives - qui permettent de calculer ces intégrales. Ces outils ne nécessitent pas d'avoir absolument des fonctions positives mais fonctionnent dans tous les cas de figure. On peut donc donner une définition généralisée de l'intégrale d'une fonction continue.

Définition : Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Soit *a*,*b* deux réels et *f* une fonction **continue** de **signe quelconque** sur l'intervalle $[a\ ;b]$.

f étant continue sur l'intervalle $[a\ ;b]$, on note *F* une primitive de *f* et on définit l'intégrale de *f* entre *a* et *b* comme suit :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple

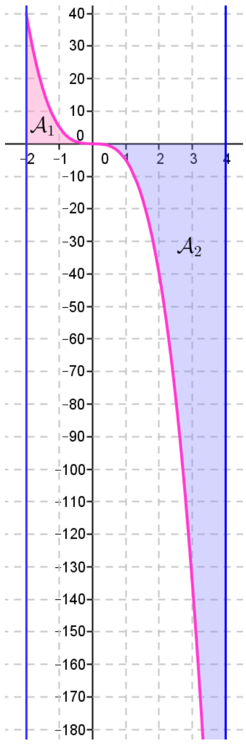
Calculons $\displaystyle\int_{-2}^{4} -5x^3\,dx$

$f(x) = -5x^3$ est une fonction continue sur [-2 ;4]. Une primitive est $F(x) = \dfrac{-5}{4}x^4$

Par conséquent $\int_{-2}^{4} -5x^3 \, dx = \left[\frac{-5}{4}x^4\right]_{-2}^{4} = F(4) - F(-2)$. Or :

- $F(-2) = \frac{-5}{4}(-2)^4 = -20$
- $F(4) = \frac{-5}{4}(4)^4 = -320$

Donc $\int_{-2}^{4} -5x^3 \, dx = -320 + 20 = -300$



Bien sur cette intégrale ne peut plus s'interpréter comme une aire, une aire n'étant jamais négative. Cependant, on peut tout de même donner une interprétation en se basant sur la notion d'aire vue initialement. L'intégrale est en fait la différence entre l'aire de la partie au dessus de l'axe des abscisse ($\mathcal{A}_1$) avec l'aire de la partie située sous l'axe des abscisse ($\mathcal{A}_2$).

En résumé $\int_{-2}^{4} -5x^3 \, dx = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = -300$.

L'intégrale négative indique qu'il y a plus de surface de courbe sous l'axe des abscisses (bleu) qu'au dessus (rose).

B. Calculer une intégrale

Question

[Solution n°23 p 47]

Calculer $A = \int_{0}^{1} \frac{x}{x^2 + 1} dx$

C. Relation de Chasles

Fondamental : Relation de chasles

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et $c \in [a\,;b]$.

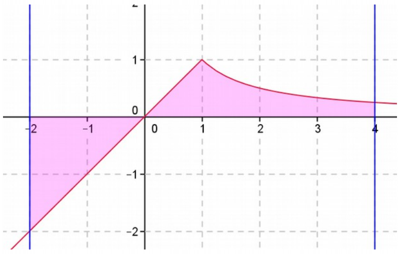
Alors $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$

Complément : Démonstration

Si *F* est une primitive de *f* sur $[a\,;b]$, alors

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple



La courbe ci-contre représente la fonction f sur l'intervalle [-2 ;4] définie par :

- $f(x) = x$ si $x \in [-2\,;1]$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \in [1\,;4]$

Montrer qu'elle est continue sur [-2 ;4] puis calculer $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$

La relation de Chasles permet d'écrire $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx$.

Calculons $\displaystyle\int_{-2}^{1} x\,dx$

$F_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$ est **une primitive** de cette première fonction. On a :

- $F_1(-2) = \dfrac{(-2)^2}{2} = 2$
- $F_1(1) = \dfrac{1^2}{2} = 0,5$

donc $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = F_1(1) - F_1(-2) = -1,5$

Calculons $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{x}\,dx$

$F_2(x) = \ln x$ est **une primitive** de cette seconde fonction. On a :

- $F_2(1) = \ln 1 = 0$
- $F_2(4) = \ln 4$

donc $\displaystyle\int_{1}^{4} f(x)\,dx = F_2(4) - F_2(1) = \ln 4$

Par conséquent l'intégrale cherchée est la somme des deux intégrales que nous avons calculées.

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx = -1,5 + \ln 4$$

D. Linéarité de l'intégrale

La propriété suivante, dite de linéarité, se déduit aisément des formules vue sur les primitives sur la somme et la multiplication par un nombre réel *k*.

Fondamental : Linéarité de l'intégrale.

Soit *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et *k* un réel quelconque.

- $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Exemple

Soit f une fonction telle que $\int_1^3 f(x)\,dx = 2$, calculer $\int_1^3 \frac{3}{2} f(x) - x\,dx$.

On sait que $\int_1^3 \frac{3}{2} f(x) - x\,dx = \frac{3}{2}\int_1^3 f(x)\,dx - \int_1^3 x\,dx$. Or :

- $\int_1^3 f(x)\,dx = 2$
- $\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$.

On en déduit la valeur de l'intégrale cherchée : $\int_1^3 \frac{3}{2} f(x) - x\,dx = \frac{3}{2} \times 2 - 4 = -1$

E. Positivité

Fondamental : Propriété de positivité

Soit f une fonction continue **positive** sur un intervalle $[a\,;b]$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

En d'autre termes, l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle est positive, ce qui est logique dans la mesure où elle s'interprète comme une aire (voir le début du cours).

Complément : Démonstration

Soit F une primitive de f.

La fonction ***F*** est croissante car sa dérivée f est **positive** !

F conserve donc les inégalités. Puisque $b \geqslant a,\ F(b) \geqslant F(a)$ donc $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \geqslant 0$

De cette propriété se déduit la suivante :

Fondamental : L'intégrale conserve les inégalités des fonctions.

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$.

Si pour tout $x \in [a\,;b],\ f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

Complément

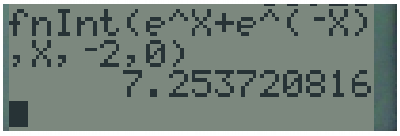
Cette propriété se démontre en utilisant la propriété de positivité sur la fonction $g(x) - f(x)$ qui est **positive**.

Exemple

Déterminer sans calculatrice le signe de $\int_{-2}^{0} e^x + e^{-x}\, dx$

e^x et e^{-x} sont toutes deux positives sur $[-2\,;0]$ donc puisque $-2 < 0$, $\int_{-2}^{0} e^x + e^{-x}\, dx > 0$

On peut faire une vérification à l'aide de la calculatrice.



F. Aire d'un domaine

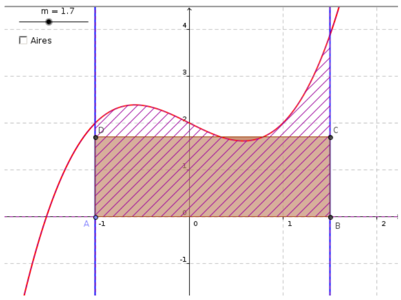
Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions f et g définies par f(x)=x, g(x)=x², pour $x \in [0\,;1]$.

Valeur moyenne d'une fonction

V

A. Activité d'approche

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1\,;1,5]$ par $f(x) = x^3 - x + 2$. On note $\mathcal{A}$ l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1\,;1,5]$.



Question 1

[Solution n°24 p 47]

A l'aide de la figure ci-dessus, donner intuitivement une estimation de la valeur de m à choisir pour obtenir l'égalité des aires sous la courbe et du rectangle ABCD

Question 2

[Solution n°25 p 47]

A l'aide de la simulation ci-dessous, faire varier la valeur de *m* à l'aide du curseur pour affiner votre conjecture. Affichez ensuite les valeurs des aires pour vérifier la valeur trouvée.

Nous allons à présent vérifier par le calcul cette conjecture.

Question 3

[Solution n°26 p 48]

Calculer la valeur exacte le l'aire $\mathcal{A}$ sous la courbe.

Vérifiez votre calcul à l'aide de la calculatrice.

Indices :

Il s'agit de calculer $\int_{-1}^{1,5} x^3 - x + 2\, dx$

Pour une fonction polynôme, il n'est pas compliqué de déterminer une *primitive...*

Question 4

[*Solution n°27 p 48*]

En déduire la valeur de *m* pour que l'aire de ABCD soit égale à l'aire $\mathcal{A}$ sous la courbe.

Indice :

L'aire du rectangle est Longeur x largeur. La longeur est donnée. L'aire finale aussi.

Question 5

[*Solution n°28 p 48*]

Exprimer en fonction des données de départ (intervalle $[a\,;b]$ et fonction *f*) la formule permettant de calculer directement cette valeur de *m*.

Indice :

Nous avons trouvé $m = \dfrac{\mathcal{A}}{AB}$.

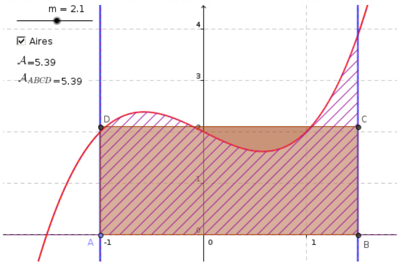
B. Valeur moyenne

Définition

Soit *f* une fonction définie, continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

Alors le nombre $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est appelé *valeur moyenne de f sur* l'intervalle $[a\,;b]$

Complément : Illustration graphique



Dans le cas où f **est positive sur [a ;b]**, la valeur moyenne m de la fonction f est la hauteur du rectangle ABCD de base $(b-a)$ ayant la même aire que l'aire sous la courbe représentative de f entre *a* et *b*.

Exemple : Fonction constante

Soit $f(x) = 3$, déterminons la moyenne de f sur $[1\,;4]$

$m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_1^4 3\,dx = \dfrac{1}{3}(3\times 4 - 3\times 1)$ car une primitive de $f(x) = 3$ est $F(x) = 3x$

donc $m = \dfrac{12-3}{3} = 3$

La valeur moyenne d'une fonction constante sur un intervalle est la constante elle-même.

Exemple : Fonction affine

Soit $f(x) = 3x - 2$, déterminons la moyenne de f sur $[1\,;4]$

$m = \frac{1}{b-a}\int_1^4 3x - 2\,dx$

Une primitive de $f(x) = 3x - 2$ est $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x$

- $F(1) = \frac{3}{2}1^2 - 2 = -\frac{1}{2}$
- $F(4) = \frac{3}{2}4^2 - 2 \times 4 = 24 - 8 = 16$

donc $m = \frac{16,5}{3} = 5,5$

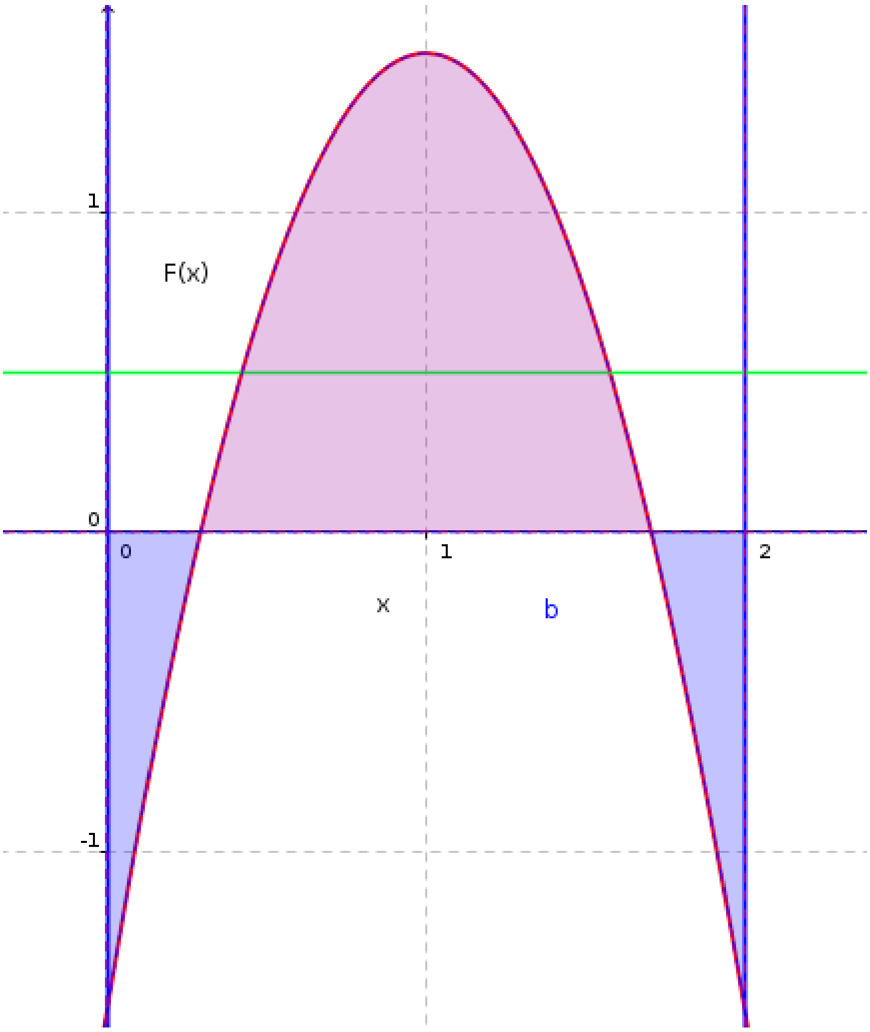
Or $f(1) = 1$ et $f(4) = 10$. 5,5 est la **moyenne** entre 1 et 10.

La valeur moyenne d'une fonction affine f sur un intervalle $[a\,;b]$ est la moyenne de $f(a)$ et $f(b)$

C. Exercice d'application

Le bénéfice en milliers d'euros d'une production de q kg de produit de beauté est donné par $f(q) = -3q^2 + 6q - 1,5$.

La production de l'entreprise varie selon les jours de 0 à 2 kg.



Question

[Solution n°29 p 48]

Déterminer la valeur moyenne du bénéfice de l'entreprise.

Indice :

On appliquera la formule donnant la valeur moyenne de la fonction f *sur l'intervalle* $[0\,;2]$.

Tester ses connaissances

VI

Pour ce test d'auto-évaluation final, vous devez obtenir un minimum de 80% de bonnes réponses. En cas d'échec, révisez la section du cours qui vous a posé des difficultés et retentez à nouveau le test.

Exercice 1

La fonction $F\ : x \longmapsto 5 + \ln(2x + 10)$ *est une primitive sur* $[0\,;+\infty[$ *de la fonction f définie par*

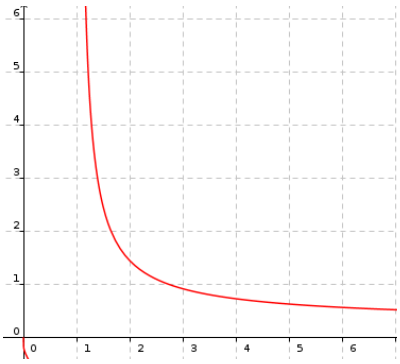
- ○ $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$
- ○ $f(x) = \dfrac{1}{2x+10}$
- ○ $f(x) = 5 + \dfrac{1}{x+5}$

Exercice 2

Une primitive de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ *par* $f(x) = \ln x + 1$ *est*

- ○ $x \longmapsto x\ln x + x$
- ○ $x \longmapsto x\ln x$
- ○ $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

Exercice 3



On considère la fonction *f* définie sur $]1\ : +\infty[$ et représentée pat la courbe ci-contre.

- ○ $\int_2^3 f(x)\,dx > \int_3^4 f(x)\,dx$
- ○ $\int_3^4 f(x)\,dx \geqslant 1$
- ○ La valeur moyenne de *f* sur [3 ;5] est $\frac{1}{2}$

Exercice 4

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ *par* $f(x) = \frac{5}{x}$*. On note* $\mathcal{C}$ *sa courbe représentative. L'aire exprimée en unités d'aire du domaine délimité par la courbe* $\mathcal{C}$*, l'axe des abscisses et les droites d'équation x=1 et x=2 est égale à*

- ○ $5\ln 2$
- ○ $\ln 10 - \ln 5$
- ○ 3,466
- ○ $\ln\frac{2}{5} - \ln\frac{1}{5}$

Exercice 5

L'intégrale $\int_0^1 e^{2x}\,dx$ *est égale à*

- ○ $\frac{-1+e^2}{2}$
- ○ $1 - e^2$
- ○ $2e^2 - 2$

Exercice 6

L'intégrale $\int_0^1 3xe^{x^2}\,dx$ *est égale à*

- ○ $6(e-1)$
- ○ $\frac{3}{2}(e-1)$
- ○ $\frac{3}{2}e$

Exercice 7

L'intégrale $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$ *est égale à*

○	$-\dfrac{1}{12}$
○	$\ln\dfrac{4}{3}$
○	$\dfrac{1}{12}$

Exercice 8

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;0]$ *par* $f(x)=x^2$*. Sa valeur moyenne sur l'intervalle* $[-3\,;0]$ *est :*

○	m=4,5
○	m=3
○	$m=\dfrac{1}{3}$
○	m=-3

Solution des exercices

> Solution n°1 *(exercice p. 10)*

La fonction f est décroissante sur $[0\,;2]$ donc pour tout $x \in \left[k\frac{2}{n}\,;(k+1)\frac{2}{n}\right]$, $f(k+1)\frac{2}{n} \leqslant f(x) \leqslant k\frac{2}{n}$

De plus chaque rectangle a pour base $\frac{2}{n}$ donc

- l'aire du rectangle sous la courbe est $f\left((k+1)\frac{2}{n}\right) \times \frac{2}{n}$
- l'aire du rectangle sur la courbe est $f\left(k\frac{2}{n}\right) \times \frac{2}{n}$

> Solution n°2 *(exercice p. 10)*

```
INITIALISATION:
  Saisir n
  S1 prend la valeur 0
  S2 prend la valeur 0
TRAITEMENT :
  Pour k allant de 0 à n-1 Faire :
    S1 prend la valeur S1 + 2/n*f(2*(k+1)/n)
    S2 prend la valeur S2 + 2/n*f(2*k/n)
  Fin Pour
SORTIE :
  Afficher S1, S2 et S2-S1
```

> Solution n°3 *(exercice p. 11)*

Voici le programme sous Python. Sur calculatrice, le programme est très semblable. Il faut toutefois faire attention à renommer les variables s1 et s2 en R et S par exemple car les calculatrices n'acceptent en général que des noms d'une lettre.

```
def f(x):
  return 4-x*x
s1,s2=0,0
n=int(input("Entrer n : "))
for k in range(n):
  s1=s1+2/n*f(2*(k+1)/n)
```

```
  s2=s2+2/n*f(2*k/n)
print(s1)
print(s2)
print(s2-s1)
```

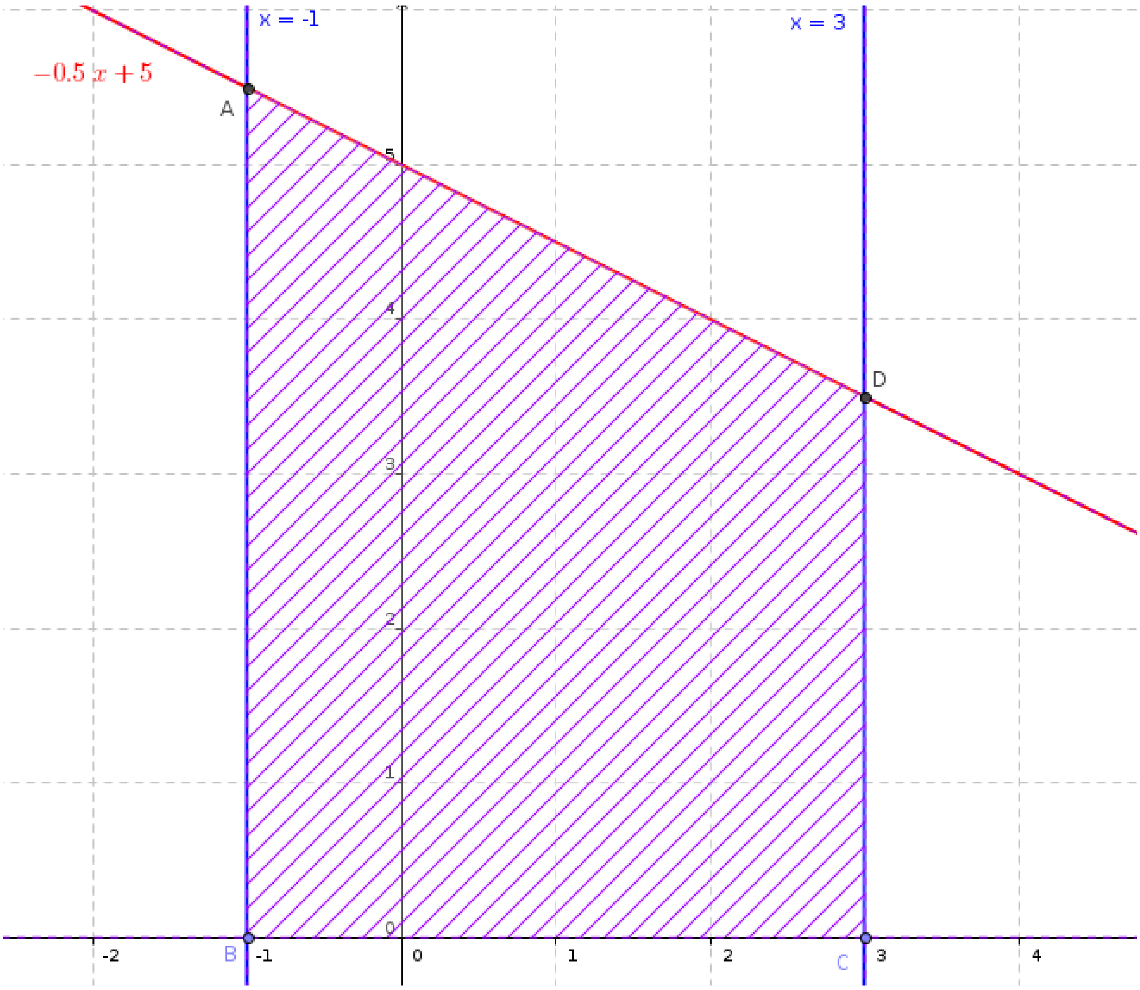
> Solution n°4 *(exercice p. 11)*

En prenant n=1000, le programme retourne

- s1=5.329332000000006
- s2=5.337332000000005
- une précision de l'encadrement de $s2 - s1 \approx 0.008$

On en déduit que 5,33 est une valeur approchée à 10^{-2} qui convient.

> Solution n°5 *(exercice p. 13)*



> Solution n°6 (exercice p. 13)

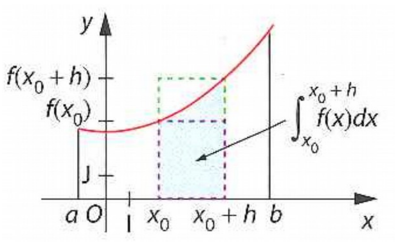
Avec les notations de la figure, $\mathcal{A} = \dfrac{(CD + AB) \times BC}{2}$ donc :

$\mathcal{A} = \dfrac{(3,5 + 5,5) \times 4}{2}$ donc $\mathcal{A} = 18$ unités d'aire,

donc $\displaystyle\int_{-1}^{3} -\frac{1}{2}x + 5\,dx = 18$

> Solution n°7 (exercice p. 15)

Si h>0



$F(x_0 + h) - F(x_0)$ désigne l'aire sous la courbe comprise entre x_0 et $x_0 + h$

Puisque *f* est croissante, cette aire est comprise entre

- l'aire du rectangle sous la courbe de base *h* et de hauteur $f(x_0)$ soit $h \times f(x_0)$
- l'aire du rectangle au dessus la courbe de base *h* et de hauteur $f(x_0 + h)$ soit $h \times f(x_0 + h)$

Par conséquent, on a l'inégalité

$hf(x_0) \leqslant F(x_0 + h) - F(x_0) \leqslant hf(x_0 + h)$

Puisque $h > 0$, on peut diviser cette inégalité par *h* pour obtenir l'inégalité demandée.

> Solution n°8 (exercice p. 15)

Si h<0

$F(x_0) - F(x_0 + h)$ désigne l'aire sous la courbe comprise entre $x_0 + h$ et x_0

Puisque *f* est croissante, cette aire est comprise entre

- l'aire du rectangle sous la courbe de base $-h$ et de hauteur $f(x_0 + h)$ soit $-h \times f(x_0 + h)$
- l'aire du rectangle au dessus la courbe de base $-h$ et de hauteur $f(x_0)$ soit $-h \times f(x_0)$

Par conséquent, on a l'inégalité $-hf(x_0 + h) \leqslant F(x_0) - F(x_0 + h) \leqslant -hf(x_0)$

Puisque $h < 0$, on peut diviser cette inégalité par $-h > 0$ pour obtenir :

$f(x_0 + h) \leqslant \dfrac{F(x_0) - F(x_0 + h)}{-h} \leqslant f(x_0)$

Cette inégalité est celle demandée.

> Solution n°9 (exercice p. 15)

Nous savons que si $x_0 \in [a\,;b]$ et $x_0 + h \in [a\,;b]$

Alors $f(x_0) \leqslant \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$ ou $f(x_0 + h) \leqslant \dfrac{F(x_0) - F(x_0 + h)}{-h} \leqslant f(x_0)$

selon le signe de *h*.
Faisons tendre h vers 0 dans cette inégalité :

- $f(x_0)$ est constant donc tend vers $f(x_0)$
- $f(x_0+h)$ tend vers $f(x_0)$ car la fonction ***f* est continue** en x_0. On utilise ici la *définition de la continuité* - p.51 en x_0

D'après le *théorème des gendarmes* - p.53, on en déduit que $\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ converge vers une limite et que cette limite est $f(x_0)$

Mais d'après la *définition du nombre dérivé d'une fonction en un point* - p.55cette limite est aussi $F'(x_0)$

On vient donc de montrer que *F* est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$

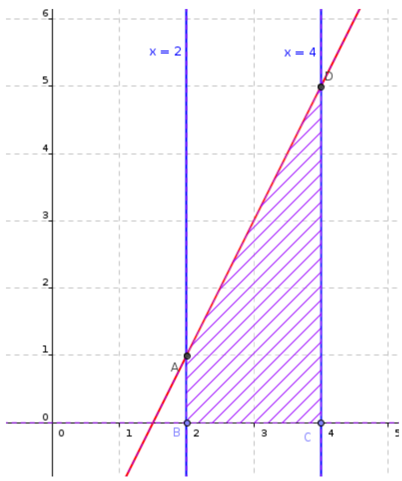
> Solution n°10 *(exercice p. 16)*

On sait que $2x$ est la dérivée de x^2 et que 3 est la dérivée de $3x$. On peut proposer comme fonction $F(x) = x^2 - 3x$. $F'(x) = 2x - 3 = f(x)$

Attention

Cette fonction **F n'est pas unique**. En effet, on sait qu'une constante se dérive en 0. On peut donc **ajouter** à $F(x)$ n'importe quelle **constante**, on aura toujours $F'(x) = f(x)$. On aurait ainsi pu prendre $F(x) = x^2 - 3x + 10$

> Solution n°11 *(exercice p. 16)*



On connaît $F(x) = x^2 - 3x$ qui est dérivable et $F'(x) = f(x)$. Par conséquent $\displaystyle\int_{-2}^{4} 2x - 3\,dx = F(4) - F(2)$. Or

- $F(4) = 16 - 12 = 4$
- $F(2) = 4 - 6 = -2$

Donc $\displaystyle\int_{-2}^{4} 2x - 3\,dx = 4 - (-2) = 6$.

Cela se vérifie aisément sur le graphique en comptant les carreaux.

Complément

Si on avait utilisé une autre fonction F différente de la première par une constante, le résultat eut été le même. Par exemple si on prend $F(x) = x^2 - 3x + 10$, on a :

- $F(2) = 8$
- $F(4) = 14$

donc $\displaystyle\int_{-2}^{4} 2x - 3\,dx = 14 - 8 = 6$.

Peu importe donc la fonction F **choisie** du moment que l'on a $F' = f$.

> Solution n°12 (exercice p. 18)

Si m est positif ou nul

Dans ce cas on peut affirmer que la fonction *f* est **continue** et **positive** sur $[a\,;b]$.

Nous *savons alors* que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de *f* sur $[a\,;b]$

Si m strictement négatif

On se ramène alors au cas précédent en définissant sur $[a\,;b]$ la fonction $g\ : x \longmapsto f(x) + (-m)$. En effet,

- la fonction *g* est **continue** sur $[a\,;b]$ puisque *l'est*
- la fonction *g* est **positive** sur $[a\,;b]$ puisque son minimum est $m + (-m) = 0$

Donc d'après le premier cas, la fonction *g* admet donc une primitive *G* telle que $G' = g$.

Considérons sur $[a\,;b]$ la fonction $F\ : x \longmapsto G(x) + mx$

Alors *F* est dérivable sur $[a\,;b]$ comme somme de fonctions dérivables et $F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$

La fonction *F* est donc une primitive de *f* sur $[a\,;b]$

> Solution n°13 (exercice p. 18)

Si *F* est une primitive de *f*, il est clair que $F + k$ l'est aussi car $(x \longmapsto k)' = 0$

Réciproquement

Supposons que *F* et *G* soient deux primitives de *f* sur I.

Alors $F - G$ est dérivable sur I et $(F - G)' = f - f = 0$ sur I.

La fonction $F - G$ est donc égale à une constante *k* sur I ce qui démontre la dernière partie de cette propriété puisque $G = F + k$

> Solution n°14 (exercice p. 19)

Sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, le dénominateur des fonctions f et F ne s'annule pas car $x + 1 > 0$. Il n'y a donc pas de problème de définition ou de dérivabilité pour ces fonctions sur l'intervalle considéré.

Pour calculer F', on applique la formule de la dérivée d'un quotient avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x + 1$. On a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.

$$F'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} = f(x)$$

Méthode

On a montré que F était dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et que pour tout $x \in]-1\,;+\infty[, F'(x) = f(x)$

F est donc une primitive de f sur $]-1\,;+\infty[$

> Solution n°15 (exercice p. 19)

Méthode

Toutes les primitives de f sont de la forme $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle. Il faut donc calculer k de manière à avoir $G(0) = 0$.

$$G(0) = F(0) + k = \frac{-1}{1} + k = k - 1$$

On veut que $G(0) = 0$ donc $k - 1 = 0$ donc $k = 1$.

Il existe donc une unique primitive de f prenant la valeur 0 en 0 : c'est $G(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1} + 1$

Complément

On peut réduire l'expression de G en mettant le tout au même dénominateur :

$G(x) = \dfrac{2x - 1 + x + 1}{x + 1}$ donc $G(x) = \dfrac{3x}{x + 1}$

Les expressions de F et de G diffèrent donc et il n'est pas toujours évident au premier coup d'œil de voir qu'elles **ne diffèrent qu'à une constante près**.

> Solution n°16 (exercice p. 23)

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 5x$$

> Solution n°17 (exercice p. 23)

Pour $n = 3$, la formule $-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ donne $-\dfrac{1}{2x^2}$

Reste à ne pas oublier la constante 5 en facteur de la fonction. On a donc $F(x) = -\dfrac{5}{2x^2}$

> Solution n°18 (exercice p. 24)

$f(x) = 5 \times u'(x) \times u(x)$ avec $u(x) = \ln x$

Or la dérivée de $u'(x)u(x)$ est $\dfrac{u(x)^2}{2}$

Donc $F(x) = \dfrac{5(\ln x)^2}{2}$

> Solution n°19 (exercice p. 24)

$f(x) = -\dfrac{1}{3} \times (-3)e^{-3x+1}$ donc de la forme $f(x) = -\dfrac{1}{3} \times u'e^u$ où $u(x) = -3x + 1$

La constante multiplicative se retrouve telle quel dans la primitive, donc :

$$F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+1}$$

> Solution n°20 *(exercice p. 24)*

$f(x) = \frac{3}{2} \times 2xe^{x^2-1}$ donc $f(x) = \frac{3}{2} \times u'e^u$ avec $u(x) = x^2 - 1$

On peut alors déduire $F(x) = \frac{3}{2}e^{x^2-1}$

> Solution n°21 *(exercice p. 24)*

$f(x) = -\frac{2}{3} \times \frac{-3}{1-3x}$ donc de la forme $f(x) = -\frac{2}{3} \times \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 - 3x$

On applique la formule en n'oubliant par la constante multiplicative en facteur. On obtient donc :

$F(x) = -\frac{2}{3} \times \ln(1 - 3x)$

> Solution n°22 *(exercice p. 24)*

$f(x) = 4 \times \frac{2x}{(x^2+3)^2}$ donc de la forme $4 \times \frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2 + 3$

Or $\frac{u'}{u^2}$ a pour primitive $\frac{-1}{u}$ donc en prenant en compte le 4 en facteur, on a :

$F(x) = \frac{-4}{x^2+3}$

> Solution n°23 *(exercice p. 28)*

$f\ : x \longmapsto \frac{x}{x^2+1}$ est une fonction continue et positive sur $[0\,;1]$. On peut donc calculer l'intégrale en déterminant une primitive.

Or f est du type $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ si on pose $u(x) = x^2 + 1$

Le *formulaire* des primitives usuelles nous dit que nous pouvons choisir $F(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$

Donc $A = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}\ln 2$

> Solution n°24 *(exercice p. 33)*

L'exemple choisi avec 1,7 donne visiblement une aire de ABCD trop petite.

Si on choisit m=2,5, l'aire de ABCD sera visiblement trop grande.

La bonne valeur doit se situer entre les deux. On peut conjecturer une valeur autour de 2,2 peut-être.

> Solution n°25 *(exercice p. 33)*

- avec $m = 2,1$, l'aire de ABCD vaut 5,25

- avec $m = 2,2$, l'aire de ABCD vaut 5,5

l'aire sous la courbe est évaluée par géogébra à **5,39**, donc la valeur de *m* cherchée se situe **entre 2,1 et 2,2**.

> Solution n°26 *(exercice p. 33)*

D'après les formules du cours, $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x$ est une primitive de *f*

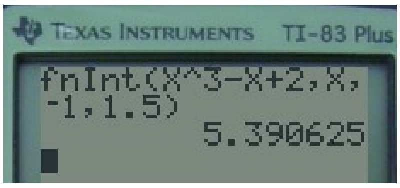
$$F(-1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{-9}{4}$$

$$F(\frac{3}{2}) = \frac{3^4}{2^4 \times 4} - \frac{3^2}{2^2 \times 2} + 2 \times \frac{3}{2} = \frac{201}{64}$$

Donc $\displaystyle\int_{-1}^{1,5} x^3 - x + 2\, dx = \frac{201}{64} - \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{345}{64} \approx 5,39$

Pour les calculs exacts avec les fractions, vous pouvez vous aider des fonctions de calcul sur les fractions de vos calculatrices.

Il est toujours utile de vérifier la valeur approchée obtenue avec sa calculatrice au moyen de la fonction de calcul numérique d'intégrales.



> Solution n°27 *(exercice p. 34)*

On a $\mathcal{A} = AB \times m$ donc $m = \frac{\mathcal{A}}{AB} \approx \frac{5,39}{2,5} \approx 2,15$

La valeur de *m* cherchée est de **2,15 environ**, ce qui est **conforme** à la conjecture initiale.

> Solution n°28 *(exercice p. 34)*

l'aire $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$

La longueur $AB = b - a$

On en déduit que la valeur de *m* se calcule par la formule

$$m = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b - a} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx$$

> Solution n°29 *(exercice p. 36)*

$$m = \frac{1}{2 - 0} \int_0^2 f(q)\, dq$$

Déterminons une primitive de f. C'est un polynôme. On sait donc d'après le cours que :

$$F(q) = -\frac{3}{3}q^3 + \frac{6}{2}q^2 - 1,5q = -q^3 + 3q^2 - 1,5q$$

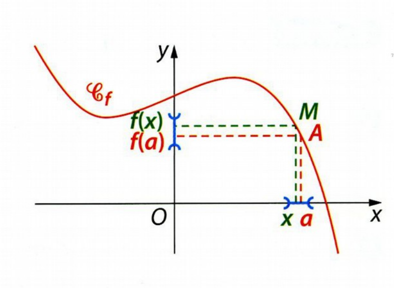
- $F(0) = 0$
- $F(2) = -8 + 3 \times 4 - 3 = 1$

donc $m = \frac{1}{2-0}(F(2) - F(0) = \frac{1}{2}$

La valeur moyenne du bénéfice de l'entreprise est donc 500 euros.

Contenus annexes

- Définition



Soit une fonction f définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. On note C_f la courbe représentative de f et A le point de C_f d'abscisse a. Pour tout réel $x \in I$, on considère le point M de C_f d'abscisse x.

En général, lorsque la courbe C_f est "sans trous", c'est à dire qu'on peut la parcourir sans lever le crayon, lorsque le nombre x est proche du nombre a, le point M est également proche du point A.

On dit alors que la fonction est *continue* sur l'intervalle I. Nous allons formaliser cette notion de manière un peu plus rigoureuse en nous aidant de la notion de limite vue au chapitre précédent.

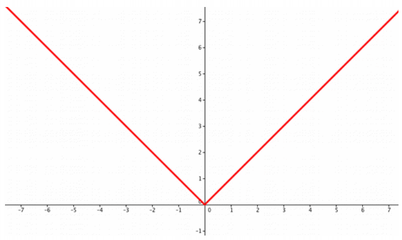
Définition : Définition rigoureuse de la continuité

Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I

On dit que la fonction f est *continue en un réel* $a \in I$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

On dit que la fonction *f* est *continue sur un intervalle* I si f est continue pour tout réel $a \in I$

Exemple : Fonction valeur absolue



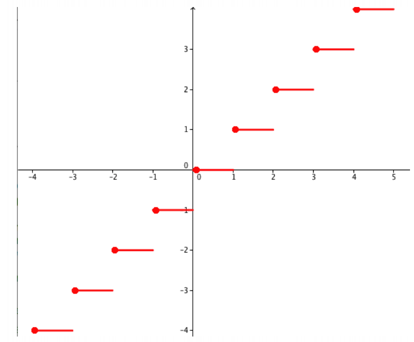
On définit la fonction *valeur absolue* sur $\mathbb{R}$ par :

- *V(x)=x* si *x≥0*
- *V(x)=-x* si *x<0*

Cette fonction se représente par deux fragments de droites qui se joignent en 0. Sa courbe représentative forme un « *V* » assez reconnaissable.

Cette fonction est définie pour tout réel et est continue sur $\mathbb{R}$ car même en 0 où se produit un changement de forme, on peut ne pas **lever le crayon** lors du tracé.

Exemple : Partie entière



On définit la fonction *partie entière* sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto E(x)$ où *E(x)* est le **plus grand entier inférieur ou égal** à *x*. Ainsi

- *E(2,5)=2*
- *E(-2,4)=-3*
- *E(1,9999999)=1*
- *E(2)=2*

La fonction partie entière n'est **pas continue pour chaque valeur de x entière**. Elle forme ce qu'on appelle une *fonction en escalier*.

Elle est par contre continue sur *« chaque marche »*, c'est à dire sur chaque intervalle $[n\,;n+1[$ où $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque valeur entière, un gros point sur la courbe indique la valeur effectivement prise par la fonction pour éviter toute ambiguïté de lecture graphique.

On voit sur cet exemple par exemple que

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} E(x) = 2$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} E(x) = 1$
- $E(1) = 1$

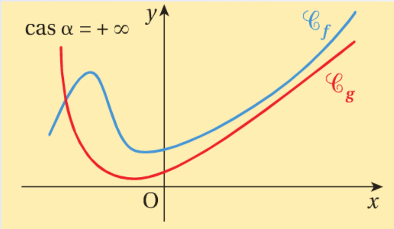
Par conséquent, la limite en 1 n'existe pas (il y a une limite à droite et une à gauche). On ne peut pas écrire $\lim\limits_{x \to 1} E(x) = E(1)$ donc la fonction **n'est pas continue en 1** et il en est de même pour chaque entier.

- Théorèmes de comparaison

Les théorèmes suivants sont très pratiques pour calculer une limite d'une fonction compliquée en la comparant à des fonctions plus simples dont on connaît la limite.

Fondamental : Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I voisinage de α, α étant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$



Si

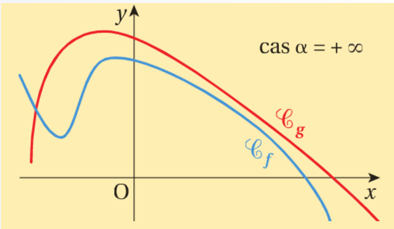
- Pour tout $x \in I, f(x) \geqslant g(x)$
- $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$

Si

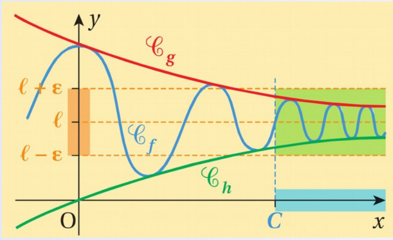
- Pour tout $x \in I, f(x) \leqslant g(x)$
- $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$



Fondamental : Théorème des gendarmes

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I voisinage de α, α étant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$



Si

- Pour tout $x \in I, h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$
- $\lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell$

Alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$

- Dérivée en un point

Définition

Si le quotient $T_a(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ **tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0**, alors on dit que *f est dérivable en a*.

Le nombre réel vers lequel tend le taux d'accroissement $T_a(h)$ est appelé *nombre dérivé de f en a*. On le note $f'(a)$.

Remarque

En reprenant la notation des limites introduite lors de l'exercice précédent, on peut écrire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Le nombre h s'étant rapproché de 0, le nombre dérivé $f'(a)$ **ne dépend plus que de a** contrairement au taux d'accroissement $T_a(h)$ qui **dépend à la fois de a et de h**. C'est la différence fondamentale qu'il y a entre le taux d'accroissement et le nombre dérivé : le second étant la limite du premier lorsque h tend vers 0.

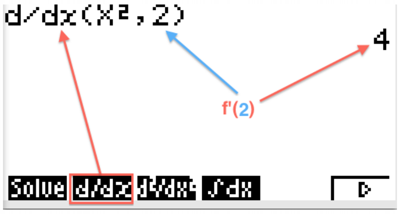
Exemple

En reprenant l'exercice du paragraphe précédent, on peut affirmer avec les notations introduites ici que $f : x \longmapsto x^2$ est **dérivable en 2** et $f'(2) = 4$.

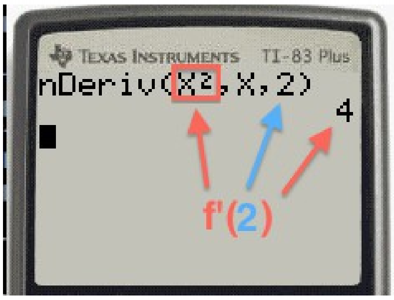
Complément : Utiliser la calculatrice Casio pour calculer f'(a)

Pour calculer la dérivée en un point avec une calculatrice de type CASIO, aller dans `MENU RUN OPTN CALC`.

On calcule ici la dérivée en 2 de la fonction $f(x) = x^2$, c'est à dire $f'(2)$.



Complément : Utiliser la calculatrice TI pour calculer f'(a)



Pour calculer la dérivée en un point avec une calculatrice de type TI, aller dans `MATH 8 :nDeriv(`.

On calcule ici la dérivée en 2 de la fonction $f(x) = x^2$, c'est à dire $f'(2)$.