

Fonction logarithme népérien

1.0



OLIVIER LECLUSE

Table des matières



Objectifs	7
Introduction	9
I - Notion de Logarithme Néperien	11
A. Rappel et Définition.....	11
B. Courbe représentative de $f(x)=\ln x$	12
C. Premières propriétés.....	12
D. Résoudre des équations simples.....	13
II - Relation fonctionnelle	15
A. Relation fonctionnelle.....	15
B. Utilisation des tables de log.....	17
C. Conséquences immédiates.....	20
D. Simplifier les écritures.....	22
III - Étude de la fonction Logarithme népérien	23
A. Continuité et dérivabilité.....	23
B. Calcul d'une dérivée avec $\ln$	28
C. Étude d'une fonction faisant intervenir $\ln$	28
D. Variations de la fonction $\ln$	28
E. Limites de la fonction $\ln$	31
F. Résoudre une inéquation - une équation.....	35
G. Tangentes particulières.....	35
H. Étude de fonction.....	37
I. Croissances comparées.....	38
J. Calculs de limites.....	42
IV - Résolution d'équations avec les logarithmes	43
A. Racine n-ième d'un nombre.....	43
B. Une erreur de mathématiques en direct.....	46
C. Recherche de l'exposant.....	47
D. Déterminer un seuil.....	48
V - Exercice : Logarithme décimal : Activité	51
VI - Tester ses connaissances	55

Solution des exercices	59
Références	75
Contenus annexes	77

Objectifs

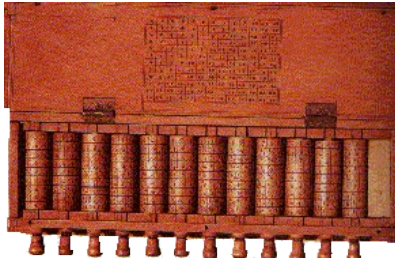
- Connaître le sens de variation, les limites et la représentation graphique de la fonction $\ln$
- Utiliser l'équivalence $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$
- Utiliser la relation fonctionnelle dans les transformations d'écriture

Pour ce chapitre, il faudra connaître le chapitre sur la *fonction exponentielle*¹

1 - http://lcs.allende.lyc14.ac-caen.fr/~lecluseo/TS/Exponentielle/web/co/Ch04_Exponentielle_web.html

Introduction

Le mathématicien écossais John Napier (1550 ; 1617), plus connu sous le nom francisé de Neper, est le célèbre inventeur des logarithmes, qu'il décrivit en 1614 dans son ouvrage « *Description de la merveilleuse règle des logarithmes* ». Depuis, cette méthode a contribué à d'innombrables avancées scientifiques et techniques en rendant possibles des calculs compliqués jusqu'alors. Avant que les calculatrices n'existent, les logarithmes étaient couramment utilisés en arpentage et en navigation.



Neper fut aussi l'inventeur des *bâtons de Neper*², où sont gravées les tables de multiplication et qui peuvent être disposés selon différents modèles pour faciliter les calculs.

Le logarithme en base b d'un nombre est égal à l'exposant y satisfaisant à l'équation $x = b^y$. Par exemple, comme $3^5 = 243$, nous disons que le *logarithme* de 243 en base 3 est $\log_3(243) = 5$.

Le logarithme permet, au travers de l'usage de tables de logarithmes, de transformer des multiplications en addition et donc des calculs complexes en calculs plus simples. Supposons que l'on veuille faire 8×16 : Sachant que $8 = 2^3$ et $16 = 2^4$, $8 \times 16 = 2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$. En d'autres termes, il nous a suffi d'ajouter les logarithmes en base 2 de 8 et 16 ($3 + 4 = 7$) pour connaître le résultat de cette multiplication.

C'est sur ce principe que fonctionnaient les *règles à calcul*³ que nos parents utilisaient à l'école.

Aujourd'hui, diverses quantités et échelles s'expriment sous forme de logarithmes d'autres quantités. Par exemple, l'échelle des **pH** en chimie, les décibels^{décibel} 🗣️ pour mesurer le son, l'échelle de Richter^{échelle de Richter} 📉 sont des quantités utilisant des échelles logarithmiques de base 10.

Voir la vidéo sur youtube :

<http://youtu.be/rWfl7Pw8YVE>⁴

2 - http://fr.wikipedia.org/wiki/B%C3%A2tons_de_Napier

3 - http://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gle_%C3%A0_calcul

4 - <http://youtu.be/rWfl7Pw8YVE>

Notion de Logarithme Néperien

Rappel et Définition	11
Courbe représentative de $f(x)=\ln x$	12
Premières propriétés	12
Résoudre des équations simples	13

A. Rappel et Définition



Rappel : La fonction exponentielle

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, c'est à dire que les images de tous les nombres réels sont des nombres réels positifs.

Pour tout réel $a \in]0 ; +\infty[$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ (c'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires).



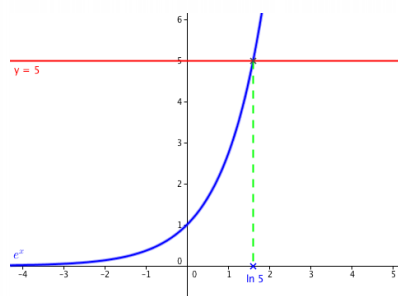
Définition : Logarithme néperien

On appelle *logarithme néperien* d'un **réel strictement positif** a , l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On le note $\ln a$.

La fonction $\ln$ qui à x associe $\ln x$ est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



Exemple



L'équation $e^x = 5$ admet une unique solution. On le sait grâce au **Théorème des Valeurs Intermédiaires** car :

- $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $4.953 \approx e^{1.6} < 5 < e^{1.61} \approx 5.002$

Le nombre unique tel que $e^x = 5$ est $\ln 5$. La calculatrice nous en donne une valeur approchée : $x \approx 1.6094$



Attention : Pas de logarithme de nombres négatifs !

Il apparaît clairement sur la figure que si $a \leq 0$, la droite rouge d'équation $y = a$ **ne rencontre pas** la courbe bleue de l'exponentielle. Il n'y a donc pas de point d'intersection donc **pas de logarithme pour les nombres négatifs**.

La fonction $\ln$ est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

B. Courbe représentative de $f(x)=\ln x$



Simulateur : Activité de découverte de la courbe de la fonction $\ln$

- Déplacer le curseur pour modifier le nombre k .
- La figure illustre la résolution graphique de $e^x = k$.
- Cochez la case M' pour faire apparaître le point de coordonnées $M'(k; \ln k)$.

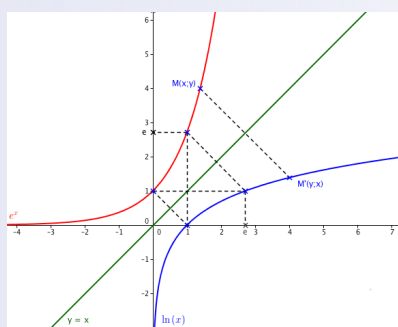


Remarque

On voit en cochant le point M' et en bougeant le curseur k que la courbe de la fonction Logarithme Népérien apparaît point par point. Compte tenu de la manière dont le point M' est construit à partir du point M, on voit se dégager une propriété fondamentale :



Fondamental



Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des *fonctions exponentielles* et *logarithme népérien* **sont symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Remarque

De même que la courbe de la fonction exponentielle ne passe jamais "sous" l'axe des abscisses, la courbe de la fonction logarithme népérien ne franchit jamais l'axe des ordonnées (partie gauche) car la **fonction n'est pas définie pour les réels négatifs, ni même en 0**. La courbe se rapproche de l'axe sans jamais le toucher.

C. Premières propriétés



Fondamental : Conséquences de la définition du logarithme

On obtient de la définition précédente que :

1. si $x > 0$, $y = \ln x$ **si et seulement si** $x = e^y$
2. $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$
3. **Pour tout** nombre réel x , on a $\ln e^x = x$
4. Pour tout nombre réel **positif** x , on a $e^{\ln x} = x$



Complément : Démonstration

1. Découle directement de la définition
2. $e^0 = 1$ donc $0 = \ln 1$
 $e^1 = e$ donc $\ln e = 1$
 $e^{-1} = \frac{1}{e}$ donc $\ln \frac{1}{e} = -1$
3. Si on pose $y = e^x$, alors $x = \ln y = \ln e^x$
4. Si on pose $y = \ln x$ pour x positif, alors $x = e^y = e^{\ln x}$



Exemple

$e^{\ln 5}$	5
$\ln e^{-4}$	-4
PMAT	

- $e^{\ln 5} = 5$
- $\ln e^{-4} = -4$
- mais attention, $e^{\ln(-4)} \neq -4$ car $\ln(-4)$ n'existe pas !

D. Résoudre des équations simples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

Question 1

[Solution n°1 p 41]

$$\ln x = -2$$

Indice :

$$\ln a = b \text{ si et seulement si } a = e^b$$

Question 2

[Solution n°2 p 41]

$$e^{x+1} = 5$$

Indice :

$$\text{Pour tout } x, x = e^{\ln x}$$

Question 3

[Solution n°3 p 41]

$$3 \ln x - 4 = 8$$

Indice :

Essayer de ramener l'équation à une forme $\ln x = a$.

Relation fonctionnelle



Relation fonctionnelle	15
Utilisation des tables de log	17
Conséquences immédiates	20
Simplifier les écritures	22

Comme pour la fonction exponentielle dont elle est la cousine, la fonction Logarithme possède des propriétés algébriques très intéressantes. C'est à cause de ces relations algébriques qu'elle a été découverte très tôt par les mathématiciens dès le 17ème siècle car elle a l'étrange pouvoir de simplifier les calculs à la main en transformant les produits en sommes !

A. Relation fonctionnelle



Exemple : Découverte de la relation

Remplir, à l'aide de la calculatrice, avec des valeurs approchées au millième, le tableau suivant :

a	b	ln a	ln b	ln (a b)	ln a + ln b
1	1				
1	2				
2	3				
3	4				



Fondamental : Relation fonctionnelle

Pour tout réels x et y **strictement positifs**, on a $\ln (x \times y) = \ln x + \ln y$



Remarque

On voit d'après cette relation fondamentale que le logarithme a la propriété de transformer les produits en somme. Cette technique était utilisée avant l'invention des calculatrices pour effectuer plus rapidement des multiplications. On utilisait alors des tables de logarithmes. Voir pour cela l'exemple au paragraphe suivant.



Complément : Démonstration

Passons par l'exponentielle pour exploiter ses propriétés de calcul. On a :

$$x \times y = e^{\ln(xy)}$$

mais aussi :

$$x \times y = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$$

$$\text{Donc finalement } e^{\ln(xy)} = e^{\ln x + \ln y}$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'égalité reste vraie sans les exponentielles. On en conclut que $\ln (x \times y) = \ln x + \ln y$ pour tous nombres réels x et y strictement positifs.

B. Utilisation des tables de log

Un peu d'histoire

Nous sommes au 19ème siècle et nous souhaitons rapidement faire l'opération $1,013 \times 1,134$ sans poser la multiplication.

Nous disposons pour cela des tables de logarithmes téléchargées sur le *site de la BNF*⁵. Ici le logarithme utilisé est le logarithme décimal, légèrement différent du logarithme népérien (touche log et non ln sur la calculatrice) mais aux propriétés identiques car proportionnel au logarithme népérien.

4 II. LOGARITHMES DES NOMBRES DE 1 A 100 000. — 1^{er} TABLEAU.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff. et p. p.
1000	000 0000	0434	0869	1303	1737	2171	2605	3039	3473	3907	435 434 433
1	4341	4775	5208	5642	6076	6510	6943	7377	7810	8244	43,5 43,4 43,3
2	8677	9111	9544	9977	*0411	*0844	*1277	*1710	*2143	*2576	87,0 86,8 86,6
3	001 3609	3442	3875	4308	4741	5174	5607	6039	*6472	6905	130,5 130,2 129,9
4	7337	7770	8202	8635	9067	9499	9932	*0364	*0796	*1228	174,0 173,6 173,2
5	002 1661	2093	2525	2957	3389	3821	4253	4685	5116	5548	217,5 217,0 216,5
6	5980	6411	6843	7275	7706	8138	8569	9001	9432	9863	261,0 260,4 259,8
7	003 0295	0726	1157	1588	2019	2451	2882	3313	3744	4174	304,5 303,8 303,1
8	4605	5036	5467	5898	6328	6759	7190	7620	8051	8481	348,0 347,2 346,4
9	8912	9342	9772	*0203	*0633	*1063	*1493	*1924	*2354	*2784	391,5 390,6 389,7
1010	004 3214	3644	4074	4504	4933	5363	5793	6223	6652	7082	432 431 430
1	7512	7941	8371	8800	9229	9659	*0088	*0517	*0947	*1376	43,2 43,1 43
2	005 1805	2234	2663	3092	3521	3950	4379	4808	5237	5666	86,4 86,2 86
3	6094	6523	6952	7380	7809	8238	8666	9094	9523	9951	129,5 129,3 129
4	006 0380	0808	1236	1664	2092	2521	2949	3377	3805	4233	172,8 172,4 172
5	4660	5088	5516	5944	6372	6799	7227	7655	8082	8510	216,0 215,5 215
6	8937	9365	9792	*0219	*0647	*1074	*1501	*1928	*2355	*2782	259,8 259,6 259
7	007 3210	3637	4064	4490	4917	5344	5771	6198	6624	7051	302,4 301,7 301
8	7478	7904	8331	8757	9184	9610	*0037	*0463	*0889	*1316	345,6 344,8 344
9	008 1742	2168	2594	3020	3446	3872	4298	4724	5150	5576	388,8 387,9 387
1020	6002	6427	6853	7279	7704	8130	8556	8981	9407	9832	429 428 427
1	009 0257	0683	1108	1533	1959	2384	2809	3234	3659	4084	42,8 42,7 42,7
2	4509	4934	5359	5784	6208	6633	7058	7483	7907	8332	85,8 85,6 85,4
3	8756	9181	9605	*0030	*0454	*0878	*1303	*1727	*2151	*2575	128,4 128,4 128,1
4	010 3000	3424	3848	4272	4696	5120	5544	5967	6391	6815	171,6 171,2 170,8
5	7239	7662	8086	8510	8933	9357	9780	*0204	*0627	*1050	214,5 214,0 213,5
6	011 1474	1897	2320	2743	3166	3590	4013	4436	4859	5282	257,4 256,8 256,2
7	5704	6127	6550	6973	7396	7818	8241	8664	9086	9509	300,3 299,6 298,9
8	9931	*0354	*0776	*1198	*1621	*2043	*2465	*2887	*3309	*3732	343,2 342,4 341,6
9	012 4154	4576	4998	5420	5842	6264	6685	7107	7529	7951	386,1 385,2 384,3
1030	8372	8794	9215	9637	*0059	*0480	*0901	*1323	*1744	*2165	426 425 424
1	013 2587	3008	3429	3850	4271	4692	5113	5534	5955	6376	42,6 42,5 42,4
2	6797	7218	7639	8059	8480	8901	9321	9742	*0162	*0583	84,6 84,4 84,2
3	014 1003	1424	1844	2264	2685	3105	3525	3945	4365	4785	126,9 126,6 126,3
4	5205	5625	6045	6465	6885	7305	7725	8144	8564	8984	169,2 168,8 168,4
5	9403	9823	*0243	*0662	*1082	*1501	*1920	*2340	*2759	*3178	211,5 211,0 210,5
6	015 3598	4017	4436	4855	5274	5693	6112	6531	6950	7369	253,8 253,2 252,6
7	7788	8206	8625	9044	9462	9881	*0300	*0718	*1137	*1555	296,1 295,4 294,7
8	016 1974	2392	2810	3229	3647	4065	4483	4901	5319	5737	338,4 337,6 336,8
9	6155	6573	6991	7409	7827	8245	8663	9080	9498	9916	380,7 379,8 378,9
1040	017 0333	0751	1168	1586	2003	2421	2838	3256	3673	4090	423 422 421
1	4507	4924	5342	5759	6176	6593	7010	7427	7844	8260	42,3 42,2 42,1
2	8677	9094	9511	9927	*0344	*0761	*1177	*1594	*2010	*2427	84,6 84,4 84,2
3	018 2843	3259	3676	4092	4508	4925	5341	5757	6173	6589	126,9 126,6 126,3
4	7005	7421	7837	8253	8669	9084	9500	9916	*0332	*0747	169,2 168,8 168,4
5	019 1163	1578	1994	2410	2825	3240	3656	4071	4486	4902	211,5 211,0 210,5
6	5317	5732	6147	6562	6977	7392	7807	8222	8637	9052	253,8 253,2 252,6
7	9467	9882	*0296	*0711	*1126	*1540	*1955	*2369	*2784	*3198	296,1 295,4 294,7
8	020 3613	4027	4442	4856	5270	5684	6099	6513	6927	7341	338,4 337,6 336,8
9	7755	8169	8583	8997	9411	9824	*0238	*0652	*1066	*1479	380,7 379,8 378,9
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff. et p. p.
10 000"	= 2° 46' 40"	1000"	= 16' 40"	S = 6,685 5732	T. 5783						
10 100	= 2 48 20	1010	= 16 50		5731	5783					
10 200	= 2 50 0	1020	= 17 0		5731	5784					
10 300	= 2 51 40	1030	= 17 10		5731	5785					
10 400	= 2 53 20	1040	= 17 20		5730	5785					

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff. et p. p.
1100	041 3927	4322	4716	5111	5506	5900	6295	6690	7084	7479	395 394 393
1	7873	8268	8662	9056	9451	9845	0239	0633	1028	1422	39,5 39,4 39,3
2	042 1816	2210	2604	2998	3392	3786	4180	4574	4968	5361	3 118,5 118,2 117,9
3	5755	6149	6543	6936	7330	7723	8117	8510	8904	9297	4 158,0 157,6 157,2
4	9691	0084	0477	0871	1264	1657	2050	2444	2837	3230	5 197,5 197,0 196,5
5	043 3623	4016	4409	4802	5195	5587	5980	6373	6766	7159	6 237,0 236,4 235,8
6	7551	7944	8337	8729	9122	9514	9907	0299	0692	1084	7 276,5 275,8 275,1
7	044 1476	1869	2261	2653	3045	3437	3829	4222	4614	5006	8 316,0 315,2 314,4
8	5398	5790	6181	6573	6965	7357	7749	8140	8532	8924	9 355,5 354,6 353,7
9	9315	9707	0099	0490	0882	1273	1664	2056	2447	2839	392 391 390
1110	045 3230	3621	4012	4403	4795	5186	5577	5968	6359	6750	1 39,2 39,1 39
1	7141	7531	7922	8313	8704	9095	9485	9876	0267	0657	2 78,4 78,2 78
2	046 1048	1438	1829	2219	2610	3000	3391	3781	4171	4561	3 117,6 117,3 117
3	4952	5342	5732	6122	6512	6902	7292	7682	8072	8462	4 156,8 156,4 156
4	8852	9242	9632	0021	0411	0801	1190	1580	1970	2359	5 196,0 195,5 195
5	047 2749	3138	3528	3917	4306	4696	5085	5474	5864	6253	6 235,2 234,6 234
6	6642	7031	7420	7809	8198	8587	8976	9365	9754	0143	7 274,4 273,7 273
7	048 0532	0921	1309	1698	2087	2475	2864	3253	3641	4030	8 313,6 312,8 312
8	4418	4806	5195	5583	5972	6360	6748	7136	7525	7913	9 352,8 351,9 351
9	- 8301	8689	9077	9465	9853	0241	0629	1017	1405	1792	389 388
1120	049 2180	2568	2956	3343	3731	4119	4506	4894	5281	5669	1 38,9 38,8
1	6056	6444	6831	7218	7606	7993	8380	8767	9154	9541	2 77,8 77,6
2	9929	0316	0703	1090	1477	1863	2250	2637	3024	3411	3 116,1 115,8 115,5
3	050 3798	4184	4571	4958	5344	5731	6117	6504	6890	7277	4 154,8 154,4 154,0
4	7663	8049	8436	8822	9208	9595	9981	0367	0753	1139	5 193,5 193,0 192,5
5	051 1525	1911	2297	2683	3069	3455	3841	4227	4612	4998	6 232,2 231,6 231,0
6	5384	5770	6155	6541	6926	7312	7697	8083	8468	8854	7 270,9 270,2 269,5
7	9239	9624	0010	0395	0780	1166	1551	1936	2321	2706	8 309,6 308,8 308,0
8	052 3091	3476	3861	4246	4631	5016	5400	5785	6170	6555	9 348,3 347,4 346,5
9	6939	7324	7709	8093	8478	8862	9247	9631	0016	0400	384 383 382
1130	053 0784	1169	1553	1937	2321	2706	3090	3474	3858	4242	1 38,4 38,3 38,2
1	4626	5010	5394	5778	6162	6546	6929	7313	7697	8081	2 76,8 76,6 76,4
2	8464	8848	9232	9615	9999	0382	0766	1149	1532	1916	3 115,2 114,9 114,6
3	054 2299	2682	3066	3449	3832	4215	4598	4981	5365	5748	4 153,6 153,2 152,8
4	6131	6514	6896	7279	7662	8045	8428	8811	9193	9576	5 192,0 191,5 191,0
5	9959	0341	0724	1106	1489	1871	2254	2636	3019	3401	6 230,4 229,8 229,2
6	055 3783	4166	4548	4930	5312	5694	6077	6459	6841	7223	7 268,8 268,1 267,4
7	7605	7987	8369	8750	9132	9514	9896	0278	0659	1041	8 307,2 306,4 305,6
8	056 1423	1804	2186	2567	2949	3330	3712	4093	4475	4856	9 345,6 344,7 343,8
9	5237	5619	6000	6381	6762	7143	7524	7905	8287	8668	381 380
1140	9049	9429	9810	0191	0572	0953	1334	1714	2095	2476	1 38,1 38
1	057 2855	3237	3618	3998	4379	4759	5140	5520	5900	6281	2 76,2 76
2	6661	7041	7422	7802	8182	8562	8942	9322	9702	0082	3 114,3 114
3	058 0462	0842	1222	1602	1982	2362	2741	3121	3501	3881	4 152,4 152
4	4260	4640	5019	5399	5778	6158	6537	6917	7296	7676	5 190,5 190
5	8055	8434	8813	9193	9572	9951	0330	0709	1088	1467	6 228,6 228
6	059 1846	2225	2604	2983	3362	3741	4119	4498	4877	5256	7 266,7 266
7	5634	6013	6391	6770	7148	7527	7905	8284	8662	9041	8 304,8 304
8	9419	9797	0175	0554	0932	1310	1688	2066	2444	2822	9 342,9 342
9	060 3200	3578	3956	4334	4712	5090	5468	5845	6223	6601	379 378 377
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	379 378 377
											1 37,9 37,8 37,7
											2 75,8 75,6 75,4
											3 113,7 113,4 113,1
											4 151,6 151,2 150,8
											5 189,5 189,0 188,5
											6 227,4 226,8 226,2
											7 265,3 264,6 263,9
											8 303,2 302,4 301,6
											9 341,1 340,2 339,3
$11\ 000'' = 3^{\circ}\ 3'20''$ $11\ 00'' = 18'20''$ $S = 6,685\ 5728$ $T. 5790$ $11\ 100 = 3\ 5\ 0$ $11\ 10 = 18\ 30$ 5728 5791 $11\ 200 = 3\ 6\ 40$ $11\ 20 = 18\ 40$ 5727 5791 $11\ 300 = 3\ 8\ 20$ $11\ 30 = 18\ 50$ 5727 5792 $11\ 400 = 3\ 10\ 0$ $11\ 40 = 19\ 0$ 5727 5793											

Question 1

[Solution n°4 p 41]

Repérer dans la table les valeurs de $\log 1,013$ et de $\log 1,134$.

Indice :

Remarquer que $\log 1000 = 0$, cela permet de se repérer quant aux unités utilisées : on cherche 1013 au lieu de 1,013, car on peut considérer que les nombres sont exprimés en millième.

On pourra vérifier sa lecture au moyen de la touche **log** de la calculatrice - **et non ln** !!

Question 2

[Solution n°5 p 42]

En déduire $\log(1,013 \times 1,134)$

Indice :

La relation fonctionnelle est bien sur valable pour le logarithme décimal.

Question 3

[Solution n°6 p 42]

En utilisant la table de logarithme, en déduire une valeur approchée de $1,013 \times 1,134$

Indice :

On va lire la table dans l'autre sens et rechercher le nombre dont 0,0602225 est le logarithme.

Le nombre exact n'apparaît pas, on obtient donc un encadrement du résultat.

C. Conséquences immédiates

De la relation fonctionnelle, nous déduisons aisément plusieurs propriétés calculatoires très utilisées.



Fondamental

Pour tous réels x et y **strictement positifs**, on a

1. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
2. $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
3. $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$
4. $\ln x^n = n \ln x$ pour tout entier relatif n



Complément : Démonstration

1. $\ln \frac{1}{x} + \ln x = \ln \left(\frac{1}{x} \times x \right) = \ln 1 = 0$
2. $\ln \frac{x}{y} = \ln \left(x \times \frac{1}{y} \right) = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y$

3. $2 \ln \sqrt{x} = \ln \sqrt{x} + \ln \sqrt{x} = \ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = \ln x$
 4. $e^{n \ln x} = (e^{\ln x})^n = x^n = e^{\ln x^n}$



Exemple

$$\begin{array}{l} \ln(3 \div 4) \\ \ln 3 - \ln 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} -0.2876820725 \\ -0.2876820725 \end{array}$$

$$\ln \frac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4$$

$$\begin{array}{l} \ln \sqrt{5} \\ 0.5 \times \ln 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0.8047189562 \\ 0.8047189562 \end{array}$$

$$\ln \sqrt{5} = \frac{1}{2} \ln 5$$

$$\begin{array}{l} \ln 1024 \\ 10 \times \ln 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 6.931471806 \\ 6.931471806 \end{array}$$

$$\ln 1024 = \ln(2^{10}) = 10 \ln 2$$

D. Simplifier les écritures

Question 1

[Solution n°7 p 42]

Simplifier $A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5})$

Indice :

On se rappelle que la somme de logarithmes est le logarithme du produit

Question 2

[Solution n°8 p 42]

$B = 3 \ln 2 + \ln 5 - 2 \ln 3$

Indice :

Outre la formule précédente, on se rappellera que $n \ln x = \ln x^n$

Question 3

[Solution n°9 p 42]

$C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e}$

Indice :

On se rappelle que $\ln e = 1$

Étude de la fonction Logarithme népérien



Continuité et dérivabilité	23
Calcul d'une dérivée avec $\ln$	28
Étude d'une fonction faisant intervenir $\ln$	28
Variations de la fonction $\ln$	28
Limites de la fonction $\ln$	31
Résoudre une inéquation - une équation	35
Tangentes particulières	35
Étude de fonction	37
Croissances comparées	38
Calculs de limites	42

A. Continuité et dérivabilité



Fondamental : Continuité et dérivabilité de la fonction logarithme népérien (admis)

La fonction *logarithme népérien* est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$.



Complément

On conçoit en effet que la fonction exponentielle étant continue, la fonction logarithme dont la courbe se déduit par symétrie ne pose pas de soucis de continuité également.

Il n'y a pas de soucis de dérivabilité non plus car la courbe de la fonction exponentielle n'admet pas de tangente horizontale, et donc par symétrie celle du logarithme n'a pas par conséquent de tangente verticale.



Fondamental : Dérivée de la fonction logarithme

La dérivée de la fonction logarithme népérien sur $]0 ; +\infty[$ est $(\ln x)' = \frac{1}{x}$



Complément : Démonstration

Posons $f(x) = e^{\ln x}$.

On sait d'après la dérivée de l'exponentielle d'une fonction que $f'(x) = (\ln x)' \times e^{\ln x}$

Comme $e^{\ln x} = x$, $f'(x) = (\ln x)' \times x$

Mais on peut aussi dire directement que $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$

Par conséquent, $f'(x) = (\ln x)' \times x = 1$ donc $(\ln x)' = \frac{1}{x}$



Fondamental : Dérivée de la fonction $\ln(u(x))$

Si une fonction u est **dérivable** et **strictement positive** sur un intervalle I
Alors la fonction $\ln u(x)$ est dérivable sur I et on a

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

B. Calcul d'une dérivée avec $\ln$

Question

[Solution n°10 p 43]

Dériver la fonction suivante sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Indice :

La fonction se présente comme un quotient $\frac{u}{v}$ de deux fonctions.

C. Étude d'une fonction faisant intervenir $\ln$

On considère la fonction f définie sur $]0; \pi[$ par $f(x) = \ln(\sin x)$

Question 1

[Solution n°11 p 43]

Justifier que f est bien définie sur $]0; \pi[$

Indice :

$\ln$ est définie si son contenu est strictement positif

Question 2

[Solution n°12 p 43]

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire d'éventuelles asymptotes.

Question 3

[Solution n°13 p 44]

Déterminer le tableau de variations de f puis sa courbe représentative.

D. Variations de la fonction $\ln$

En regardant l'allure de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien, on peut conjecturer que celle-ci est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Maintenant que nous en connaissons la dérivée, on peut s'en convaincre aisément.

En effet, sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$, donc la dérivée étant strictement positive, la fonction est strictement croissante.



Fondamental

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



Complément : Démonstration

Pour tout réel $x > 0$, on a $(\ln)'(x) = \frac{1}{x} > 0$

Conséquence sur le signe de $\ln$

Sachant que :

- la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$,
- $\ln 1 = 0$

On en déduit le signe de la fonction logarithme népérien :

- Si $x \in]0 ; 1[$, $\ln x < 0$
- Si $x \in]1 ; +\infty[$, $\ln x > 0$
- Si $x = 1$, $\ln x = 0$

E. Limites de la fonction $\ln$



Fondamental : Limite en l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$



Complément : Démonstration

Soit A in réel strictement positif quelconque.

Si $x > e^A$, sachant que la fonction **Ln** est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, on a $\ln x > \ln e^A$

Donc si $x > e^A$, $\ln x > A$ ce qui est la définition d'une *limite infinie en l'infini* - p.54.



Fondamental : Limite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$



Complément : Démonstration

Soit A in réel strictement négatif quelconque.

Si $0 < x < e^A$, alors $\ln x < \ln e^A = A$

On peut donc ainsi rendre la fonction $\ln$ aussi *négative* que l'on veut pour peu que l'on s'approche suffisamment - p.55 de 0

Cela démontre la limite demandée.

Tableau de variation de la fonction $\ln$

On en déduit donc le tableau de variations ci-dessous

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		0	$+\infty$

$-\infty \nearrow \quad \quad \nearrow$

F. Résoudre une inéquation - une équation

Question 1

[Solution n°14 p 44]

Résoudre l'inéquation $\ln(x^2 + 4) \geq \ln 13$.

Indice :

Rechercher d'éventuelles valeurs interdites.

Utiliser les variations de la fonction $\ln$.

Question 2

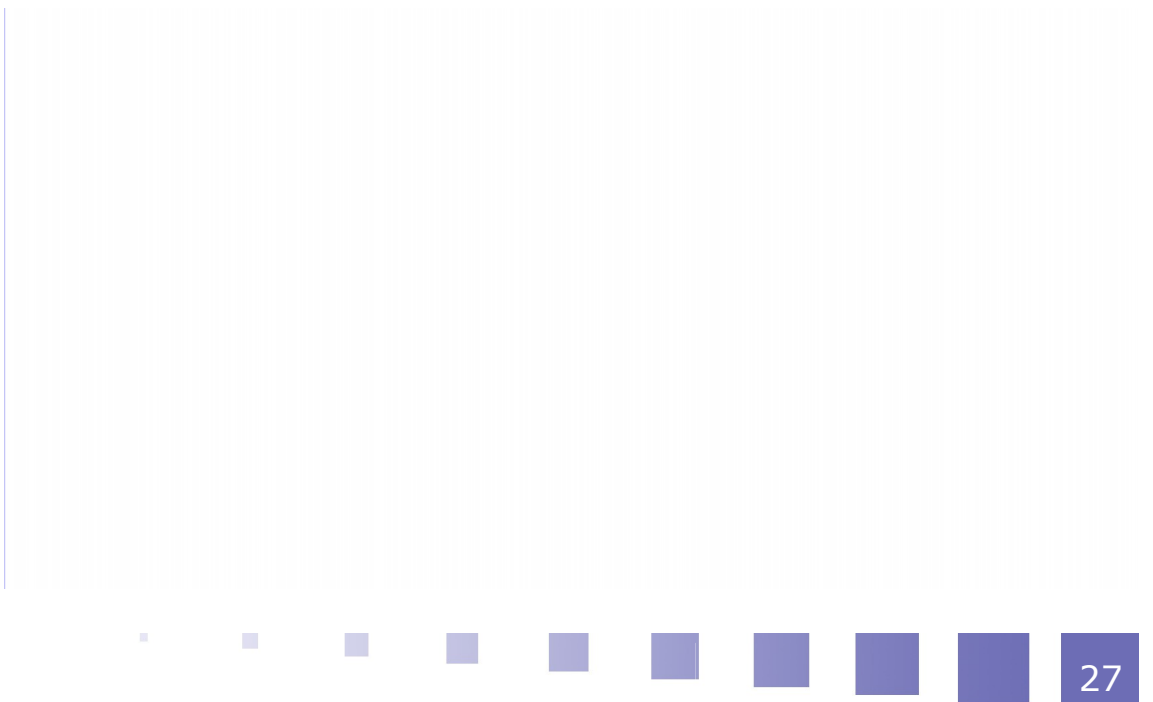
[Solution n°15 p 45]

Résoudre l'équation $\ln(x^2 + x - 6) = \ln(x - 5)$

Indice :

Ne pas oublier de regarder l'ensemble de définition des deux membres !

G. Tangentes particulières





Rappel : Équation de la tangente à une courbe en un point a

On se rappelle que l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction f dérivable en un point d'abscisse a est donnée par la formule :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Tangente en 1

On a :

- $\ln 1 = 0$
- $(\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$$y = 1(x - 1) + 0$$

Donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$: le coefficient directeur de la tangente en $x = 1$ vaut 1 et la tangente passe par le point de coordonnées (0 ; -1).

Tangente en e

On a :

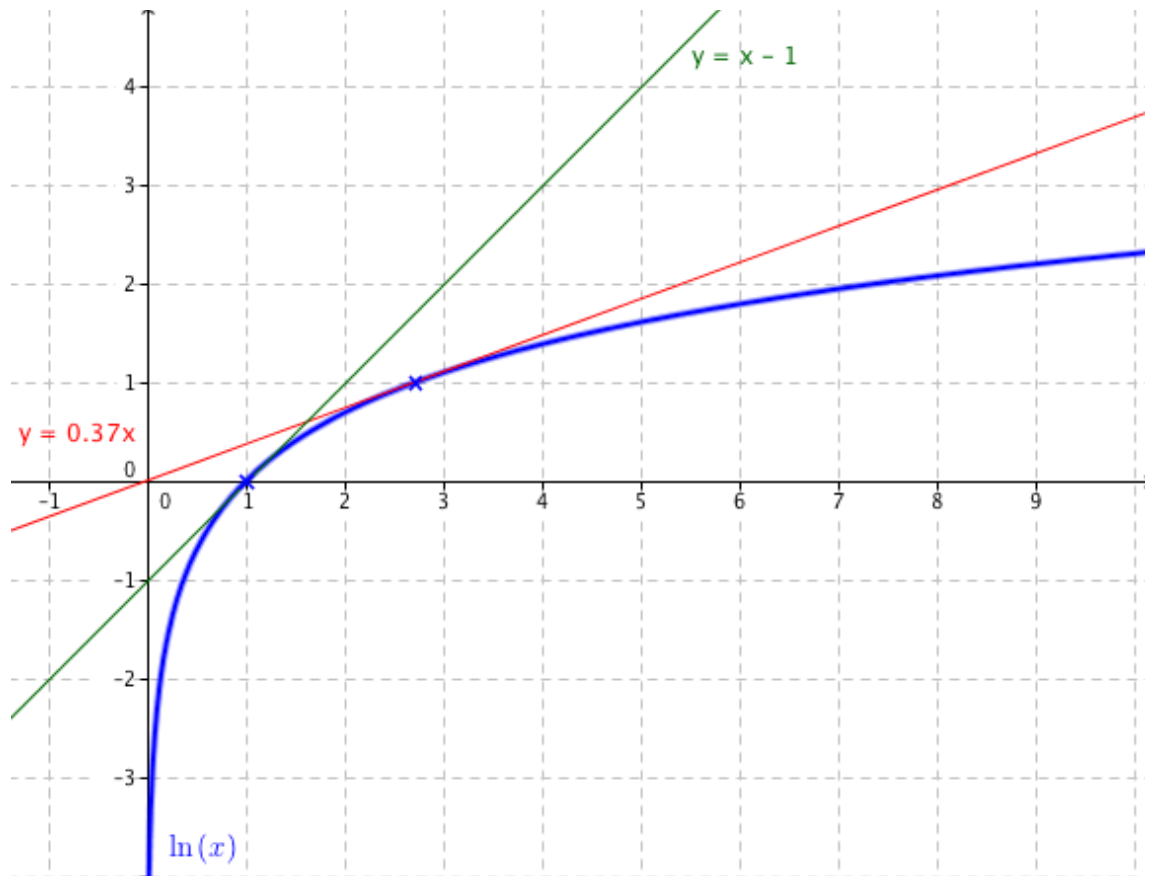
- $\ln e = 1$
- $(\ln)'(e) = \frac{1}{e}$

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1$$

Donc l'équation au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \frac{1}{e}x$.

C'est une droite qui **passe par l'origine du repère** et par le point de coordonnées (1 ; e).

Illustration



H. Étude de fonction

Étudier la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
 $f : x \mapsto 3 - x + 2 \ln x$

Question 1

[Solution n°16 p 45]

Calculer la dérivée f' et étudier son signe.

Question 2

[Solution n°17 p 46]

Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Question 3

[Solution n°18 p 46]

Tracer la courbe représentative de la fonction f avec la calculatrice.

Indice :

L'intervalle n'étant pas borné à droite, on pourra se contenter d'aller jusqu'à $x = 5$.

Le tableau de variations montre un maximum en 2,4 environ. On en déduit le réglage de la fenêtre.

I. Croissances comparées

De même on se souvient que **l'exponentielle l'emporte sur la puissance**, on a une règle similaire avec le logarithme mais cette fois ci, c'est la **puissance qui l'emporte sur le logarithme**.



*Fondamental*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$



Complément : Démonstration

Posons $X = \ln x$. On a alors $x = e^X$ et donc $\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X}$

Or quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$ également.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ d'après les résultats que l'on connaît sur l'exponentielle.

*Fondamental*

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \times \ln x = 0$$



Complément : Démonstration

Posons $X = \ln x$. On a alors $x = e^X$ et donc $x \times \ln x = e^X \times X$

Or quand x tend vers 0, X tend vers $-\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} x \times \ln x = \lim_{X \rightarrow -\infty} X \times e^X = 0$ d'après les résultats que l'on connaît sur l'exponentielle.

J. Calculs de limites

Soit la fonction $f : x \mapsto x - \ln x$.

Question 1

[Solution n°19 p 46]

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Question 2

[Solution n°20 p 46]

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Indices :

On pourra mettre le terme dominant en facteur

En l'infini, x domine sur $\ln x$

Et pour se remémorer la technique du taux d'accroissement ...

Question 3

[Solution n°21 p 46]

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

Indice :

On pourra penser à la technique du taux d'accroissement déjà rencontrée pour certaines limites comme $\frac{e^x - 1}{x}$ ou $\frac{\sin x}{x}$ en 0...

Résolution d'équations avec les logarithmes

IV

Racine n-ième d'un nombre	43
Une erreur de mathématiques en direct	46
Recherche de l'exposant	47
Déterminer un seuil	48

Dans ce paragraphe, on s'attachera à résoudre des équations très courantes du type $x^n = k$ où $n \in \mathbb{N}$ et $k > 0$.

Il faudra réinvestir les propriétés algébriques des fonctions logarithmes et exponentielles.

A. Racine n-ième d'un nombre





Définition : Propriété et définition

Soit k un nombre **strictement positif** connu et n un *entier naturel non nul*.

Dans $]0 ; +\infty[$, l'équation $x^n = k$ possède une unique solution $x = k^{1/n}$.

Le nombre $k^{1/n}$ est la racine n -ième de k .



Complément

$\ln(k^{1/n}) = \frac{1}{n} \ln k$ donc $k^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln k}$ par passage à l'exponentielle.

$$(k^{1/n})^n = \left(e^{\frac{1}{n} \ln k} \right)^n = e^{\frac{1}{n} \ln k \cdot n} = e^{\ln k} = k$$

la racine n -ième de k élevée à la puissance n donne bien k .



Exemple : Exemple d'application concrète

La consommation d'électricité par habitant en Chine est passée de 993kWh en 2000 à 2455kWh en 2008.

On suppose que, chaque année, la consommation a été multipliée par le même nombre. (Autrement dit, la suite des consommations annuelles est une suite géométrique)

Quelle est l'augmentation annuelle moyenne en pourcentage de la consommation d'électricité en Chine ? (Autrement dit, quelle est la raison de cette suite ?)

Si q est le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation de la consommation en un an, alors on peut écrire que $2455 = 993 \times q^8$

Par conséquent, $q^8 = \frac{2455}{993} \approx 2,4723$

On a donc $q = \left(\frac{2455}{993} \right)^{1/8} = e^{\frac{1}{8} \ln \frac{2455}{993}} \approx 1,1198$

Le pourcentage d'augmentation correspondant est donc $(q - 1) \times 100 \approx 12$ donc 12% par an.

B. Une erreur de mathématiques en direct

Une erreur de pourcentages pour un spécialiste de l'économie !

Jean-Paul Chapel lors du JT de France 2 du 19 Février 2013⁶ (vers 8 min 40s après le début du JT) précise en réponse à une question de la journaliste Elise Lucet.

Transcription :

Elise Lucet

... notre facture pourrait gonfler de 30% en 5 ans.

Jean-Paul Chapel du service économie de France 2

On n'avait jamais vu ça !

+6% par an pendant 5 ans, pas besoin d'avoir fait polytechnique pour voir que ça représente une hausse de 30%.

[...]

Concrètement pour la facture moyenne pour un foyer qui était l'année dernière de 693 euros passerait à 900 euros en 2017.

Question 1

[Solution n°22 p 47]

A quelle augmentation en pourcentage sur 5 ans correspond à une augmentation de 6% par an ?

Question 2

[Solution n°23 p 47]

Sachant que l'augmentation du tarif de l'électricité est de 30% sur 5 ans, quelle est le pourcentage d'augmentation chaque année, en supposant que ce dernier soit constant d'année en année ?

Indices :

On pourra poser x le coefficient multiplicateur annuel

En 5 ans, le tarif de l'électricité sera multiplié par ...

C. Recherche de l'exposant

Il arrive que pour d'autres équations, l'inconnue soit en exposant. En voici une situation concrète :

Une production est fonction de l'investissement x en **milliers d'euros**. La quantité produite $f(x)$ **en tonnes** est modélisée par la fonction $f(x) = 10 \times 1,03^x - 14$.

La production n'est réelle que lorsque l'investissement x est tel que $f(x) > 0$. Quelle quantité d'argent doit-on investir pour que la production démarre ?



Méthode : Résolution d'une inéquation avec l'inconnue en exposant

On est amené à résoudre l'inéquation $10 \times 1,03^x - 14 > 0$. En isolant l'inconnue dans le membre de gauche, l'inéquation se ramène à $1,03^x > 1,4$.

Utilisons le fait que la fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}^+$ et prenons le logarithme des deux membres. L'inégalité **ne change pas de sens**.

$\ln 1,03^x > \ln 1,4$ ce qui revient à $x \ln 1,03 > \ln 1,4$

Avant de diviser par $\ln 1,03$, on **s'assure que ce dernier est bien positif** : c'est vrai car $1,03 > 1$! L'inégalité ne va donc pas changer de sens.

$$\text{Donc, } x > \frac{\ln 1,4}{\ln 1,03} \approx 11,383$$

Par conséquent, l'entreprise devra **investir au minimum 11383 euros** afin que la production puisse démarrer.

D. Déterminer un seuil

Un procédé de fabrication industrielle d'un enduit nécessite l'incorporation toutes les heures d'un adjuvant.

Au début du procédé, pour $t=0$, on incorpore 4 litres de cet adjuvant. Puis, toutes les heures, il ne reste que la moitié de l'adjuvant en cuve et on incorpore à nouveau 4 litres d'adjuvant dans le mélange :

Ainsi au bout de n heures, la quantité S_n d'adjuvant dans le mélange est donnée par la formule :

$$S_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \frac{1}{2} + 4$$

(en effet, $S_0 = 4$)

$$S_1 = \frac{1}{2} \times S_0 + 4 = \frac{1}{2} \times 4 + 4$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times S_1 + 4 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 + 4\right) + 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 + 4 \quad \text{et ainsi de suite...}$$

Question 1

[Solution n°24 p 47]

$$\text{Montrer que } S_n = 8 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Indice :

On se rappelle de cette formule - p.56 vue au chapitre des suites donnant la somme des termes d'une suite géométrique, ici de raison $1/2$ et de premier terme 4.

Question 2

[Solution n°25 p 47]

Déterminer la limite de la suite S_n . Interpréter ce résultat.

Indice :

On se remémorera utilement cette partie - p.57 du chapitre sur les suites.

Question 3

[Solution n°26 p 48]

Déterminer le nombre d'heures au bout duquel le mélange contiendra plus de 7,9 litres d'adjuvant.

Indices :

Lors du premier chapitre sur les suites, ne connaissant pas la fonction logarithme, nous avons recours à un algorithme pour répondre à ce type de problématique.

On montrera que le problème se ramène à résoudre l'inéquation $0,5^n < \frac{0,1}{4}$

Exercice : Logarithme décimal : Activité

V

Le logarithme décimal

Le logarithme décimal, noté $\log$, est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Question 1

[Solution n°27 p 48]

Déterminer $\log 10$; $\log 100$; $\log 0,001$

Question 2

[Solution n°28 p 48]

Démontrer que la fonction $\log$ est croissante sur $]0 ; +\infty[$

Question 3

[Solution n°29 p 49]

Sans calculatrice, donner un encadrement entre deux entiers consécutifs des nombres suivants:

$\log(1789)$; $\log(25665)$; $\log(0.00933)$

Indice :

On pourra utiliser le fait que la fonction $\log$ est croissante sur $]0 ; +\infty[$

Une application du log décimal : le décibel.



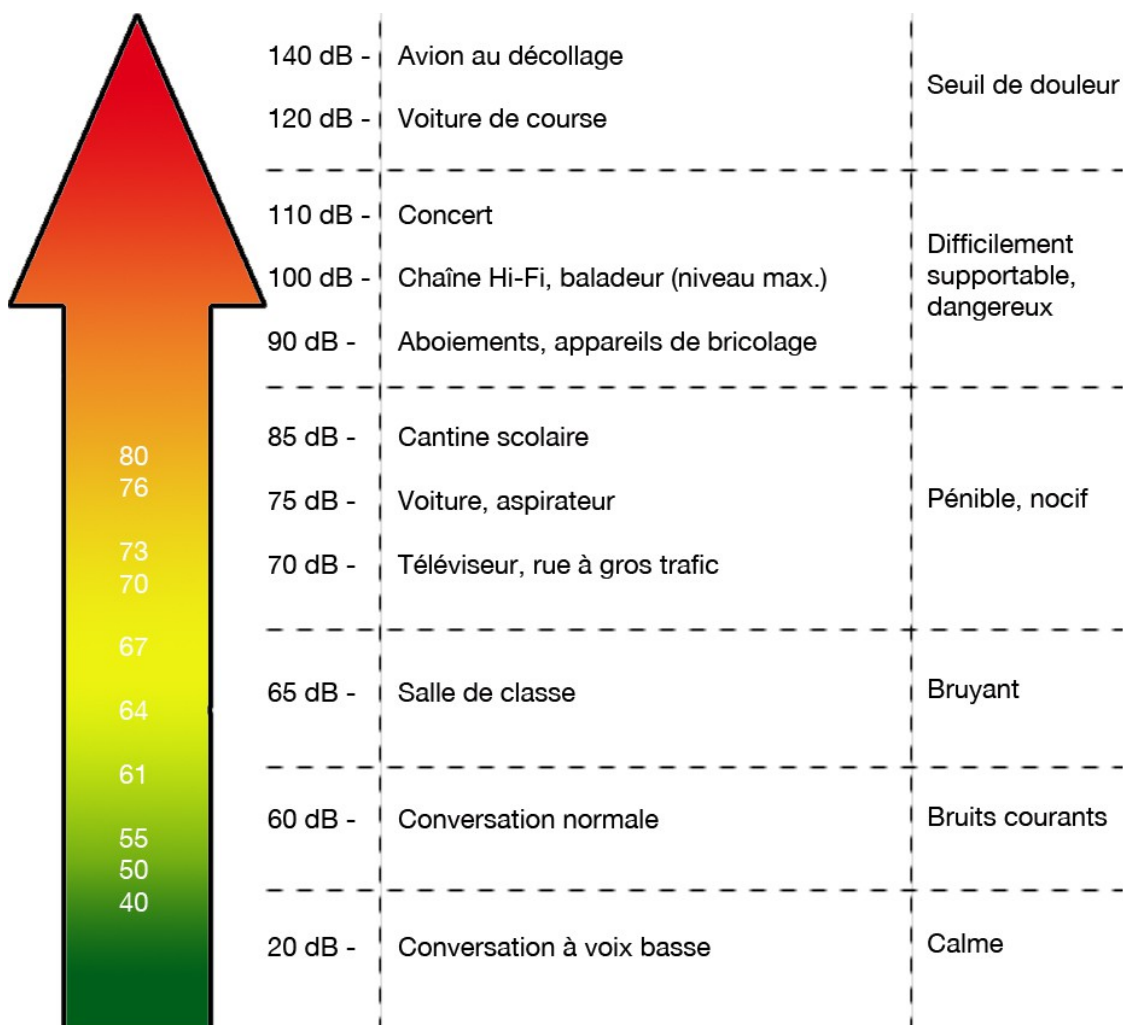
Pour quantifier la sensation sonore, on utilise une grandeur appelée *niveau sonore*. Cette grandeur, ici notée L , se mesure en *décibel acoustique* (dB_A)

Le niveau sonore, L , s'exprime en fonction de l'intensité sonore, I , (exprimée en watt par mètre-carré), et de l'intensité sonore de référence, I_0 exprimée dans la même unité que I

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Par convention, $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ qui correspond à la limite de sensibilité de l'oreille

à la fréquence de 1000 Hz.



Question 4

[Solution n°30 p 49]

Calculer le niveau sonore correspondant à une intensité sonore de 10^{-5} W.m^{-2} (correspondant au niveau sonore d'un grand magasin à l'heure d'affluence).

Question 5

[Solution n°31 p 49]

Calculer l'intensité sonore correspondant à un niveau sonore de 100 dB_A (marteau piqueur)

Question 6

[Solution n°32 p 49]

Un réacteur d'avion a un niveau sonore de 140 dB_A à environ 100m (niveau qui peut occasionner des lésions irréversibles de l'audition). Quelle est l'intensité sonore correspondante ?

On considère la fonction f définie sur $[10^{-12}; +\infty[$ par $f(x) = 10 \log \frac{x}{10^{-12}}$

Question 7

[Solution n°33 p 49]

Calculer $f(10^{-12})$

Question 8

[Solution n°34 p 49]

Démontrer que pour tout réel $x \in [10^{-12}; +\infty[$, $f(x) = 10 \log x + 120$

Question 9

[Solution n°35 p 49]

Calculer f' et en déduire les variations de f

Question 10

[Solution n°36 p 50]

Si le niveau sonore passe de 40 dB_A à 50 dB_A , l'intensité sonore est multipliée par 10.

Vrai ou Faux ?

On a mesuré le niveau sonore de deux machines A et B en fonctionnement. La machine A produit un niveau sonore de 70 dB_A et la machine B produit un niveau sonore de 80 dB_A

On fait fonctionner ces deux machines côte à côte. On admet que dans ce cas, les **intensités** sonores s'additionnent.

Question 11

[Solution n°37 p 50]

Calculer les intensités sonores de chacune des machines.

Question 12

[Solution n°38 p 50]

Calculer le niveau sonore des deux machines lorsqu'elles fonctionnent ensemble côte à côte.

Que conclure ?

Tester ses connaissances

VI

Pour ce test d'auto-évaluation final, vous devez obtenir un minimum de 80% de bonnes réponses. En cas d'échec, révisez la section du cours qui vous a posé des difficultés et retentez à nouveau le test.

Exercice 1

$e^{3 \ln 2 - \ln 6 + 1}$ est égal à :

☐ 1

☐ e

☐ $\frac{4}{3} e$

☐ $\frac{4}{3}$

Exercice 2

L'équation $e^{-x+3} = 3$ a pour solution dans $\mathbb{R}$:

☐ $3 - \ln 3$

☐ $\ln 3 - 3$

☐ $3 - e^3$

☐ $e^3 - 3$

Exercice 3

Le nombre -2 est solution de l'équation...

Tester ses connaissances

☐ $\ln x = -\ln 2$

☐ $e^x = \frac{1}{e^2}$

☐ $\ln e^x = -2$

☐ $e^{\ln x} = -2$

Exercice 4

L'inéquation $2 \ln x + 4 < 2$ a pour ensemble de solutions :

☐ $]0 ; e^{-0,25}[$

☐ $] -\infty ; e^{-4}[$

☐ $] -\infty ; e[$

☐ $]0 ; e[$

Exercice 5

L'expression $x \ln(0,5) + 4 < 2$ est équivalente à :

☐ $x > \frac{-2}{\ln 0,5}$

☐ $x < \frac{-2}{\ln 0,5}$

☐ $x \ln 2 > 2$

☐ $x \ln 2 < 2$

Exercice 6

La fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x - 1)$ admet pour fonction dérivée :

☐ $f'(x) = \ln x$

☐ $f'(x) = \ln x - 1$

☐ $f'(x) = 1$

☐ $f'(x) = \frac{1}{x}$

Exercice 7

Pour tous réels strictement positifs a et b , l'expression $\frac{\ln e^a}{\ln e^{-b}}$ est égale à :

☐ $a - b$

☐ $\frac{a}{b}$

☐ ab

☐ $-\frac{a}{b}$

Exercice 8

La plus petite valeur de l'entier n tel que $1,2^n > 100$ est :

☐ 25

☐ $\frac{\ln 100}{\ln 1,2}$

☐ 26

☐ 84

Exercice 9

L'équation $x^4 = 20$ admet pour solution :

☐ 5

☐ $\frac{\ln 20}{e^4}$

☐ 16

☐ $e^{\ln 5}$

Exercice 10

Le prix d'un objet double en un an. En un mois, ce prix augmente en moyenne d'environ :

☐ 6%

☐ 8%

☐ 12%

☐ 16,6%

Exercice 11

La dérivée de la fonction $\ln(1 + x^2)$ est

☐ $\frac{1}{1 + x^2}$

☐ $\frac{2x}{1 + x^2}$

☐ $2x$

Exercice 12

Pour avoir $\ln x > 10^3$, il suffit de choisir x ...

☐ supérieur à 10^9

☐ supérieur à 1

☐ environ égal à 2×10^{434}

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 13)



Méthode

$\ln x = -2$ équivaut à $x = e^{-2}$. C'est donc l'unique solution dont une valeur approchée est 0,135

e^{-2}

0.1353352832

> Solution n°2 (exercice p. 13)



Méthode

$e^{x+1} = 5$ équivaut à $e^{x+1} = e^{\ln 5}$

Or la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc l'équation se ramène à une équation dans exponentielles :

$x + 1 = \ln 5$. La solution est donc $x = \ln 5 - 1$.



Attention

On ne confondra bien sûr pas $\ln 5 - 1$ et $\ln 4$!!

$\ln 5 - 1$

0.16094379124

$\ln 4$

0.6094379124

1.386294361

> Solution n°3 (exercice p. 13)



Méthode

$3 \ln x - 4 = 8$ équivaut à $3 \ln x = 12$ et donc $\ln x = 4$

Or on sait que $\ln x = 4$ équivaut à $x = e^4$. La solution unique est donc e^4 .

> Solution n°4 (exercice p. 19)

1010	004 3214
4	7512
2	005 1805
3	6094

$\log 1,013 \approx 0,0056094$

$$\log 1,134 \approx 0,0546131$$

1130	053 0784
1	4626
2	8464
3	054 2299
4	6131

> Solution n°5 (exercice p. 19)

$$\log (1,013 \times 1,134) = \log 1,013 + \log 1,134 \approx 0,0056094 + 0,0546131 \approx 0,0602225$$

> Solution n°6 (exercice p. 19)

Le nombre qui correspond le mieux dans la table se situe entre 1,148 7 et 1,148 8.

1140	9049	9429	9810	*0191	*0572	*0953	*1334	*1714	*2095	*2476
1	037 2856	3237	3618	3998	4379	4759	5140	5520	5900	6281
2	6661	7041	7422	7802	8182	8562	8942	9322	9702	*0082
3	058 0462	0822	1222	1602	1982	2362	2741	3121	3501	3881
4	4260	4640	5019	5399	5778	6158	6537	6917	7296	7676
5	8055	8434	8813	9192	9572	9951	*0330	*0709	*1088	*1467
6	059 4826	2225	2604	2983	3362	3741	4119	4498	4877	5256
7	5634	6013	6391	6770	7148	7527	7905	8284	8662	9041
8	9419	9797	*0175	*0554	*0932	*1310	*1688	*2066	*2444	*2822
9	060 3200	3578	3956	4334	4712	5090	5468	5845	6223	6601

$$1.013 \times 1.134 \quad \text{-----} \quad 1.148742$$

On vérifie à la calculatrice ! Et en plus **ça marche** ...



Remarque

La même méthodologie peut s'appliquer pour extraire une racine carrée ou élever à une puissance importante. Autant d'opérations très coûteuses à faire à la main et pourtant très courantes dans la vie de tous les jours à l'époque quand on est astronome ou navigateur...

> Solution n°7 (exercice p. 20)



Méthode

$$A = \ln \left| (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) \right|$$

$$A = \ln(9 - 5) \text{ d'après la 3ème égalité remarquable.}$$

$$\text{Donc, } A = \ln 4$$

> Solution n°8 (exercice p. 20)



Méthode

$$B = \ln 2^3 + \ln 5 - \ln 3^2$$

$$B = \ln \frac{2^3 \times 5}{3^2}$$

$$B = \ln \frac{40}{9}$$

> Solution n°9 (exercice p. 20)



Méthode

$$C = 2 \ln e - \ln 2 + \ln e$$

$$C = 2 - \ln 2 + 1$$

$$C = 3 - \ln 2$$

> Solution n°10 (exercice p. 22)

- $u(x) = \ln x$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$
- $v(x) = x$ donc $v'(x) = 1$

On applique la formule $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} \quad \text{donc en simplifiant :}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

> Solution n°11 (exercice p. 22)

Pour que f soit définie, il faut et il suffit que l'expression qui se trouve à l'intérieur soit strictement positive.

Or l'étude de la fonction - p.53 Sinus nous révèle que c'est bien le cas sur $]0 ; \pi[$

> Solution n°12 (exercice p. 22)

Étude en 0^+

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sin x = 0^+ \quad \lim_{\substack{U \rightarrow 0 \\ U > 0}} \ln U = -\infty$$

et

Donc d'après les théorèmes de composition des limites on en déduit que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

Étude en π^-

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} \sin x = 0^+ \quad \lim_{\substack{U \rightarrow 0 \\ U > 0}} \ln U = -\infty$$

et

Donc d'après les théorèmes de composition des limites on en déduit que $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} f(x) = -\infty$

Asymptotes

On a donc deux limites infinies en deux points finis, ce qui se traduit par deux asymptotes verticales : une en $x = 0$ et l'autre en $x = \pi$

> Solution n°13 (exercice p. 22)

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

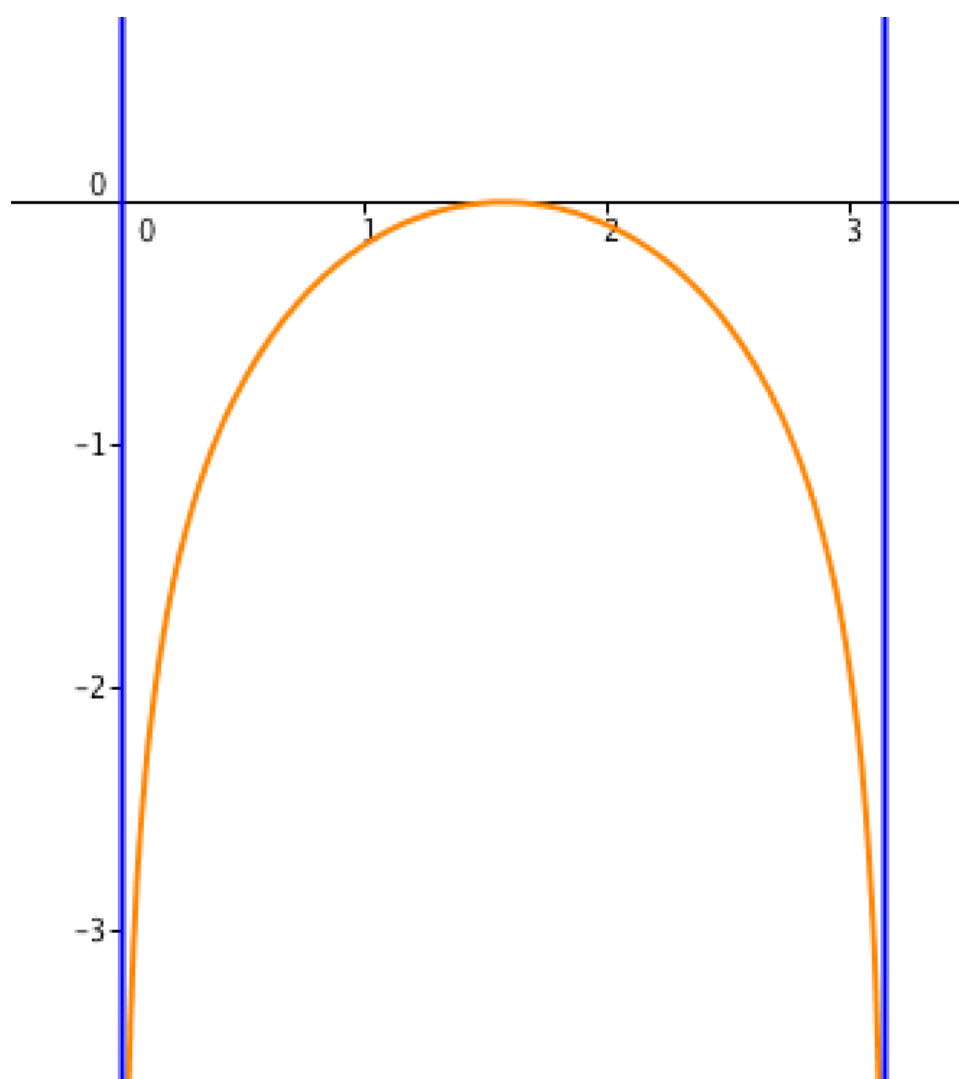
On sait - p.53 que

- Si $x \in]0; \pi[$, $\sin x > 0$
- Si $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x > 0$
- Si $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, $\cos x < 0$

De plus $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln 1 = 0$

D'où le tableau de variations ci-contre

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π			
$f'(x)$		+	0	-		
$f(x)$		$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



> Solution n°14 (exercice p. 24)

On peut déjà remarquer que pour tout x réel, $x^2 + 4$ est toujours positif. il n'y a donc pas de valeurs interdites.

La fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$ donc elle **conserve les inégalités**. Comme dans le cas des exponentielles, on peut donc réécrire l'inéquation en se débarrassant des logarithmes de part et d'autre de l'inégalité.

L'inéquation devient $x^2 + 4 \geq 13$ soit $x^2 - 9 \geq 0$

Il s'agit ici d'étudier le signe de ce polynôme du second degré qui a manifestement deux racines : 3 et -3. Il est du signe de son coefficient a (+1) donc positif à l'extérieur des racines.

Par conséquent, l'ensemble des solutions est donc :

$$S =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$$

> Solution n°15 (exercice p. 24)

Ensemble de définition

$\ln(x^2 + x - 6)$ est défini si et seulement si $x^2 + x - 6 > 0$

Réolvons cette inéquation qui revient à chercher le signe du trinôme : $\Delta = 25$

Les racines sont donc $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$. Ce trinôme est donc positif à l'extérieur des racines.

Le membre de gauche de l'équation est défini pour $x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$

$\ln(x - 5)$ est défini si et seulement si $x - 5 > 0$ donc si $x \in]5; +\infty[$

Globalement, l'équation n'a de sens que si $x \in]5; +\infty[$



Méthode : Résolution de l'équation

On se place sur l'intervalle $]5; +\infty[$. Sur cet intervalle, les fonctions logarithmes des deux membres sont définies.

La fonction Logarithme étant **strictement croissante** sur $\mathbb{R}^+$, on peut dire que pour résoudre l'équation $\ln(x^2 + x - 6) = \ln(x - 2)$ nous devons d'abord résoudre l'équation $x^2 + x - 6 = x - 2$

$x^2 + x - 6 = x - 5 \iff x^2 = 1$. Cette équation admet deux solutions : $x = -1$ ou $x = 1$

Or on se rappelle que l'équation n'a de sens que si $x \in]5; +\infty[$

Conclusion : l'équation n'**admet pas de solutions**.

> Solution n°16 (exercice p. 26)

Sur $]0; +\infty[$, on a $f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$

Le dénominateur s'annule et change de signe en $x = 0$, qui est déjà une **valeur interdite**.

Le numérateur s'annule et change de signe en $x = 2$.

On en déduit le tableau de signes suivant sur $]0; +\infty[$:

x	0	2	$+\infty$
$2-x$	+	0	-
$f'(x) = \frac{2-x}{x}$	+	0	-

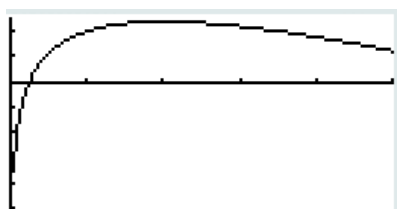
> Solution n°17 (exercice p. 26)

D'après la question précédente, on connaît le signe de la dérivée donc les variations de f . Il ne reste qu'à déterminer la valeur de la fonction au point d'abscisse 2 :

$$f(2) = 3 - 2 + 2 \ln 2 = 1 + 2 \ln 2 \approx 2,4$$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$1 + 2 \ln 2$	

> Solution n°18 (exercice p. 26)



Réglage de la fenêtre d'échelle :

- Xmin=0 et Xmax=5
- Ymin=-5 et Ymax=2,5

> Solution n°19 (exercice p. 27)

Pas d'indétermination ici, on utilise simplement les théorèmes d'opérations pour une limite du type $0 - (-\infty)$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

> Solution n°20 (exercice p. 27)

Ici la limite est une indéterminée du type $\infty - \infty$...

$$f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\text{Or on sait que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1$$

et par conséquent $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par les théorèmes d'opérations.

> Solution n°21 (exercice p. 27)

Écrivons $\frac{\ln(1+x)}{x}$ comme un taux d'accroissement de la fonction $\ln x$ en 1 :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{(1+x) - 1}$$

Or on sait que la fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable en $x = 1$ et son nombre dérivé vaut 1.

Donc le taux d'accroissement tend vers 1 quand x tend vers 0.

$$\text{Par conséquent, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

> Solution n°22 (exercice p. 30)

Une augmentation de 6% en 1 an correspond à une multiplication par 1,06.

Sur 2 ans, la facture sera multipliée par $1,06 \times 1,06$

...

Sur 5 ans, la facture sera multipliée par $1,06^5 \approx 1,338$ soit 33,8% d'augmentation environ, et non 30 %

Le journaliste n'a manifestement pas fait polytechnique mais n'a pas non plus fait son calcul correctement

> Solution n°23 (exercice p. 30)

En 5 ans, le tarif de l'électricité sera multiplié par 1,3.

Si x est le coefficient multiplicateur annuel, le tarif de l'électricité sera multiplié sur 5 ans par x^5

On a donc l'équation $x^5 = 1,3$

On en déduit que $x = \sqrt[5]{1,3} = 1,3^{1/5} \approx 1,0539$

Cela correspond donc à une augmentation en pourcentage de 5,39% et pas 6 ! !

> Solution n°24 (exercice p. 31)

$$S_n = 4 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{car le premier terme est 4 et que nous avons } n+1 \text{ termes dans notre somme.}$$

Le dénominateur est $\frac{1}{2}$. Or, diviser par $\frac{1}{2}$ c'est multiplier par 2. La somme devient donc

$$S_n = 4 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] \times 2 = 8 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = 8 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Un autre moyen d'arriver à ce résultat est aussi de considérer que la suite (S_n) est

une suite arithmético-géométrique définie par $S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + 4$ et en posant $T_n = S_n - 8$ et en montrant que T_n est une suite géométrique. cf ici⁷

> Solution n°25 (exercice p. 32)

La raison $\frac{1}{2}$ étant comprise entre 0 et 1 strictement, la limite de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ quand n tend vers l'infini est 0.

On en déduit que la limite de S_n est $8 - 4 \times 0$ donc 8.

Cela signifie qu'à long terme, le mélange contiendra quasiment 8 litres d'adjuvant.

> Solution n°26 (exercice p. 32)

7 - http://lcs.allende.lyc14.ac-caen.fr/~lecluseo/TES/Suites_web/web/co/ER_EtudeSag.html

On cherche à résoudre l'inéquation $S_n > 7,9$. Cela revient à dire que $8 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n > 7,9$

En isolant l'inconnue n à gauche, on a $-4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n > 7,9 - 8 = -0,1$. En divisant par -4 , on inverse le sens de l'inégalité donc $0,5^n < \frac{0,1}{4}$



Méthode

Appliquons à présent la fonction logarithme népérien, qui est strictement croissante, aux deux membres de l'inégalité. Le sens de celle-ci se trouve inchangé. $\ln(0,5^n) < \ln(0,025)$ donc en appliquant les propriétés du logarithme :

$$n \times \ln 0,5 > \ln 0,025$$

Il nous faut maintenant diviser par $\ln 0,5$ mais attention car ce nombre est négatif ($-0,69$ environ) !! On renverse donc encore le sens de l'inégalité.

$$n > \frac{\ln 0,025}{\ln 0,5} \approx 5,3$$

n étant un nombre entier d'heures, on en déduit qu'au delà de 6 heures, la quantité d'adjuvant ajoutée dépasse 7,9 litres.

> Solution n°27 (exercice p. 33)

- $10 = 10^1$ donc $\log 10 = 1$
- $100 = 10^2$ donc $\log 100 = 2$
- $0,001 = 10^{-3}$ donc $\log 0,001 = -3$



Remarque

La calculatrice confirme ces résultats en utilisant la formule du log décimal donnée en introduction.

```
ln(.001)/ln(10)  -3
ln(100)/ln(10)   2
ln(10)/ln(10)    1
```



Complément

De manière générale, on a pour tout entier n : $\log 10^n = n$

En effet $\log 10^n = \frac{\ln 10^n}{\ln 10} = \frac{n \ln 10}{\ln 10} = n$

> Solution n°28 (exercice p. 33)

Soient $0 < x < y$ deux réels strictement positifs ordonnées comme indiqué. Montrons que la fonction $\log$ conserve l'inégalité.

On sait que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc elle conserve l'inégalité : $\ln x < \ln y$

De plus on sait que $\ln 10 > 0$ car $10 > 1$. On peut donc diviser par $\ln 10$ sans changer de sens l'inégalité :

$$\frac{\ln x}{\ln 10} < \frac{\ln y}{\ln 10} \text{ et donc } \log x < \log y$$

La fonction $\log$ conserve les inégalités sur $]0; +\infty[$ donc la fonction $\log$ est croissante sur $]0; +\infty[$

> Solution n°29 (exercice p. 33)

$1000 < 1789 < 10000$. Puisque $\log$ est croissante, on en déduit que $3 < \log 1789 < 4$.

De même $10000 < 25665 < 100000$ donc $4 < \log 25665 < 5$

Enfin $0.001 < 0.00933 < 0.01$ donc $-3 < \log 0.00933 < -2$

> Solution n°30 (exercice p. 34)

$$L = 10 \log \frac{10^{-5}}{10^{-12}} = \log 10^7 = 10 \times 7 = 70 \text{ dB}_A$$

> Solution n°31 (exercice p. 34)

$$10 \log \frac{I}{I_0} = 100 \quad \text{donc} \quad \log \frac{I}{I_0} = 10 \quad \text{donc} \quad \frac{I}{I_0} = 10^{10}$$

$$\text{Soit } I = 10^{-12} \times 10^{10} = 10^{-2} \text{ W.m}^{-2}$$

> Solution n°32 (exercice p. 34)

On procède de la même manière qu'à la question précédente :

$$\frac{I}{I_0} = 10^{14} \quad \text{donc} \quad I = 10^{-12} \times 10^{14} = 10^2 \text{ W.m}^{-2}$$

> Solution n°33 (exercice p. 34)

$$f(10^{-12}) = \log 1 = 0$$

> Solution n°34 (exercice p. 35)

$$f(x) = 10 \log \frac{x}{10^{-12}} = 10(\log x - \log(10^{-12})) = 10 \log x - 10 \times (-12) = 10 \log x + 120$$

> Solution n°35 (exercice p. 35)

$$(\log x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 10} \right)' = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{10}{x \ln 10}$$

Or $\ln 10 > 0$ donc $f'(x)$ est positive sur $[10^{-12}; +\infty[$ et donc f est croissante sur cet

intervalle

> **Solution n°36** (exercice p. 35)

- Pour 40 dB_A , l'intensité sonore est de $I = 10^{-12} \times 10^4 = 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}$
- Pour 50 dB_A , l'intensité sonore est de $I = 10^{-12} \times 10^5 = 10^{-7} \text{ W.m}^{-2}$

L'intensité a donc été **multipliée** par 10 lorsqu'on a **ajouté** 10 dB_A

> **Solution n°37** (exercice p. 35)

Calculons l'intensité sonore de la machine A :

Pour 70 dB_A , l'intensité sonore est de $I = 10^{-12} \times 10^7 = 10^{-5} \text{ W.m}^{-2}$

Calculons l'intensité sonore de la machine B :

Pour 80 dB_A , l'intensité sonore est de $I = 10^{-12} \times 10^8 = 10^{-4} \text{ W.m}^{-2}$

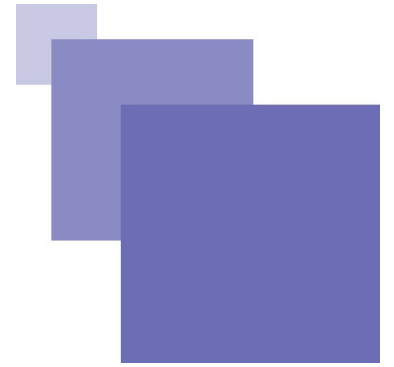
> **Solution n°38** (exercice p. 35)

Additionnons les **intensités** sonores. On obtient une intensité totale de 0,00011.

Le niveau sonore est donc $L = 10 \log 0,00011 + 120 = 80,4 \text{ dB}_A$

Le fonctionnement de la machine A n'a donc pratiquement aucune influence sur le niveau sonore global.

Références



Contenus annexes

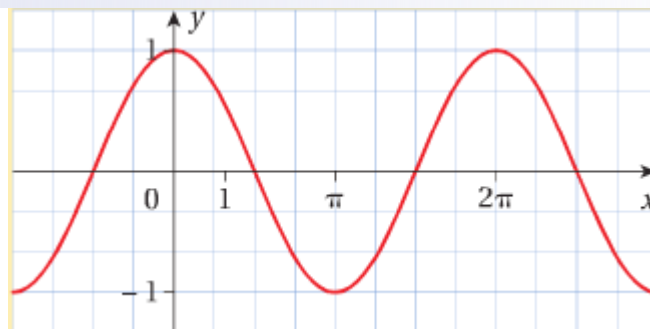
- Étude sur $[0 ; \pi]$



Fondamental : Fonction Cosinus

x	0		π
$f'(x) = -\sin x$	0	-	0
$f: x \mapsto \cos x$	1		

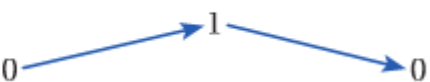
Variations de la fonction Cosinus sur $[0 ; \pi]$



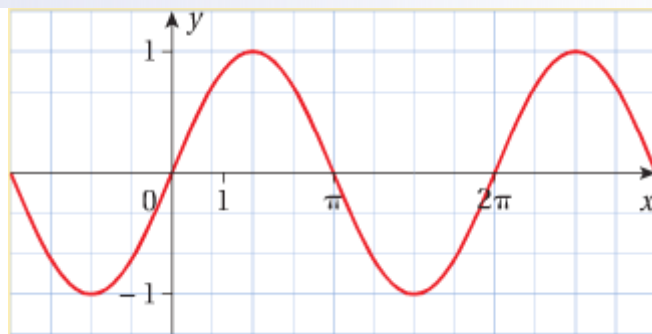
Représentation de la fonction Cosinus sur $[0 ; \pi]$



Fondamental : Fonction Sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
$f'(x) = \cos x$	1	+	0	-	-1
$f: x \mapsto \sin x$	0				

Variations de la fonction Sinus sur $[0 ; \pi]$



Représentation de la fonction Sinus sur $[0 ; 2\pi]$

- Limite infinie à l'infini



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a ; +\infty[$

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si la fonction f peut prendre des valeurs plus grandes que n'importe quel réel donné dès que x est assez grand

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



Complément : à titre d'exercice...

On peut donner des définitions analogues d'une

- limite égale à $-\infty$ en $+\infty$
- limite égale à $-\infty$ en $-\infty$
- limite égale à $+\infty$ en $-\infty$



Exemple : Limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$



Complément

Pour démontrer ces résultats, inspirez-vous de l'activité précédente.



Remarque

Si une fonction f admet une limite infinie en $+\infty$, alors la suite de terme général $u_n = f(n)$ a la même limite.



Attention

La réciproque est fausse !!

exemple : $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi x\right)$

$f(n) = n$ donc diverge vers $+\infty$, mais $f(x)$ oscille sans cesse et n'a pas de limite.



Méthode : Dresser un tableau de variation complet

Dorénavant, on fera figurer dans les tableaux de variations les limites éventuelles.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	0	$+\infty$

On lit sur ce tableau que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

- Limite infinie en un réel



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a ; b[$

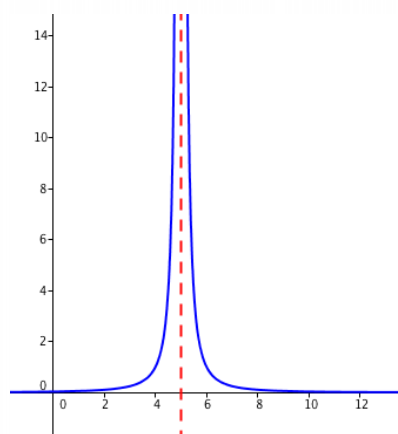
On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeur supérieure si on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut dès que x est suffisamment proche de a dans l'intervalle $]a ; b[$

En d'autres termes, pour tout nombre A , il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $f(x) > A$ dès que $x \in]a ; a + \alpha[$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
On note



Complément



Si la limite par valeur supérieure est égale à la limite par valeur inférieure, on parle simplement de limite lorsque x tend vers a .

Dans l'exemple ci-contre, on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

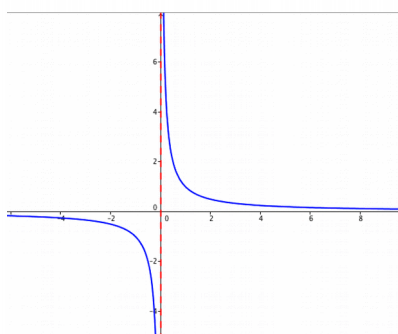


Fondamental : Asymptote verticale

Dans le cas d'une limite infinie en un point d'abscisse finie, on est en présence d'une **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction.



Exemple : Cas de la fonction inverse



On sait que l'inverse d'un nombre positif très petit est très grand, et que ce phénomène s'inverse pour les nombres négatifs. Nous avons donc le résultat suivant :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe de la fonction inverse.

- Propriété fondamentale

Soit q un réel **différent de 1** et (u_n) une **suite géométrique** de raison q . On va s'intéresser ici à la somme des n premiers termes de la suite (u_n) :

$$\text{Posons } S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n.$$

$$\text{On peut calculer } qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

Retranchons ces deux expressions :

$$S - qS = 1 + q + q^2 + \dots + q^n - q - q^2 - \dots - q^n - q^{n+1}$$

On constate que presque tous les termes s'éliminent. Ne restent que les extrêmes :

$$S - qS = S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ car } q \neq 1$$

Ce qui permet de calculer S :



Fondamental : Somme des n premiers termes d'une suite géométrique

Soit q un **réel différent de 1** et (u_n) une **suite géométrique** de raison q . Alors pour tout entier n :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On en déduit en multipliant par u_0 cette égalité que :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$



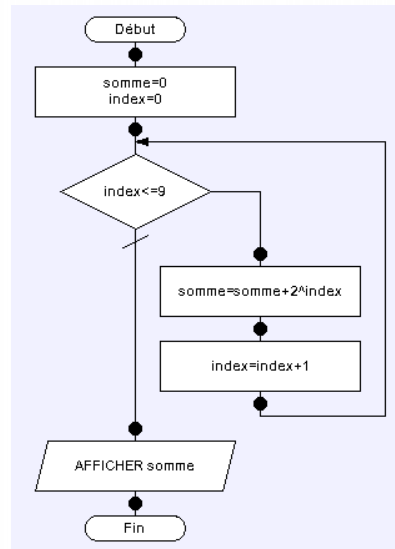
Exemple : Calculer la somme des 10 premières puissances de 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Somme
2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1023

On peut calculer cela à l'aide du tableur

A2 contient $=2^{\wedge}A1$

K2 contient $=\text{SOMME}(A2 : J2)$



On peut également vérifier cela à l'aide d'un programme correspondant à l'algorithme ci-contre.

Nous pouvons le langage Python pour implémenter cet algorithme.

On remarquera au passage l'utilisation de la boucle "for" avec comme paramètre `range(10)` pour exécuter 10 fois la section contenue dans le bloc.

`range(10)` retourne une liste des 10 premiers entiers commençant à 0 :

```
>>> range(10)
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

```
1 somme=0
2 for index in range(10):
3     somme=somme+2**index
4 print somme
```

```
>>> 1023
```

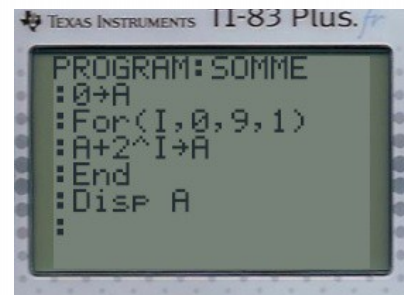
On peut le calculer mathématiquement à l'aide de la propriété vue ci-dessus.

On pose $u_n = 2^n$ la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

Alors $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 = 1 \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \frac{1 - 1024}{1 - 2} = 1023$

En utilisant la calculatrice, on peut procéder ainsi :

Avec une TI :



Avec une casio :



En utilisant algobox, on peut procéder ainsi :

- Limite d'une suite géométrique



Fondamental : Propriété admise

Soit q un nombre strictement positif :

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$



Complément

Si (u_n) est une suite géométrique positive de raison q , alors

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

En effet, u_n peut alors s'écrire $u_n = u_0 \times q^n$. La multiplication de q^n par la constante positive u_0 ne change pas le comportement de q^n à l'infini, que celui-ci tende vers 0 ou l'infini.



Exemple

Cette propriété nous permet de conforter les conjectures que vous avons faites sur les paragraphes précédents concernant les suites (u_n) et (v_n)

$u_n = 5 \times 0,2^n$. La raison est **strictement comprise entre 0 et 1** donc la suite (u_n) converge vers 0 ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$)

$v_n = 0,1 \times 1,2^n$. La raison est **strictement plus grande que 1** donc la suite (v_n) diverge ($\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$)