Terminale S

Trigonométrie

1.0

Olivier Lécluse

Octobre 2013

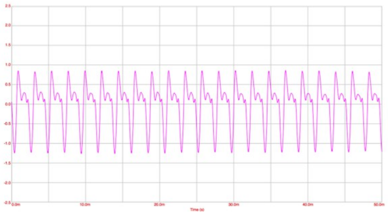
Table des matières

Objectifs

Dans ce chapitre nous étudierons les fonctions Sinus et Cosinus ainsi que leurs dérivées. Nous verrons les notions de périodicité et de parité et la représentation graphique des fonctions trigonométriques.

Introduction

Les fonctions Sinus et Cosinus permettent de décrire les sons produits par les instruments de musique et les voix. Plus généralement, elles servent pour décrire la propagation de toutes sortes d'ondes. C'est pourquoi leur étude est fondamentale pour comprendre le monde qui nous entoure.



L'image ci-contre montre l'oscillogramme d'un son de flûte. On y remarque des propriétés très particulières, caractéristiques des fonctions sinus et cosinus comme la périodicité (la manière dont la courbe se répète à intervalles réguliers) ?

Définition - dérivabilité

I

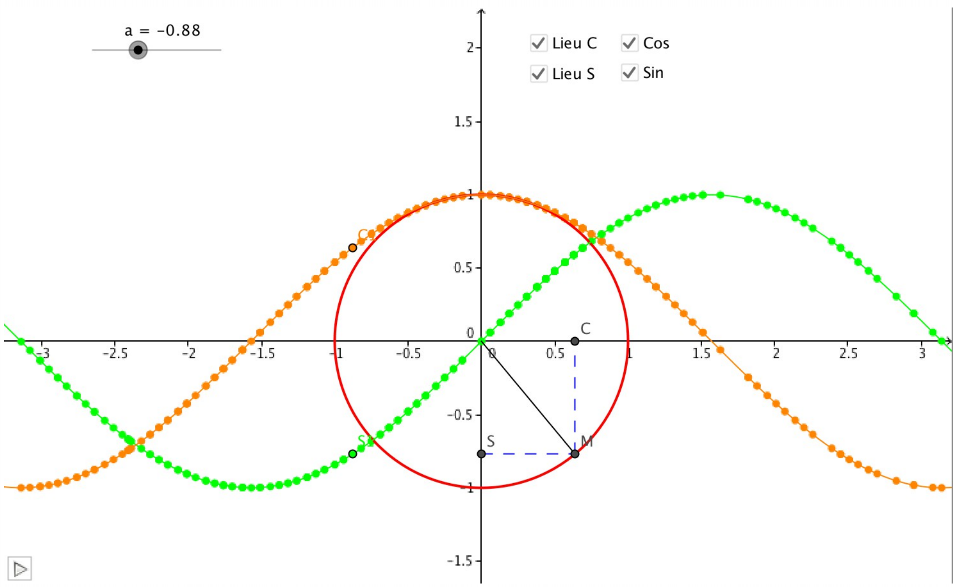
A. Construction Sinus et Cosinus

Simulateur

Observer sur l'animation ci-dessous la construction des courbes représentatives de Sinus et Cosinus à partir de leur définition sur le cercle trigonométrique.

La courbe Cosinus est obtenue à partir du lieu du point *C1* dont l'abscisse est l'angle *a* en Radians et l'ordonnée, l'abscisse du point *M* sur le cercle.

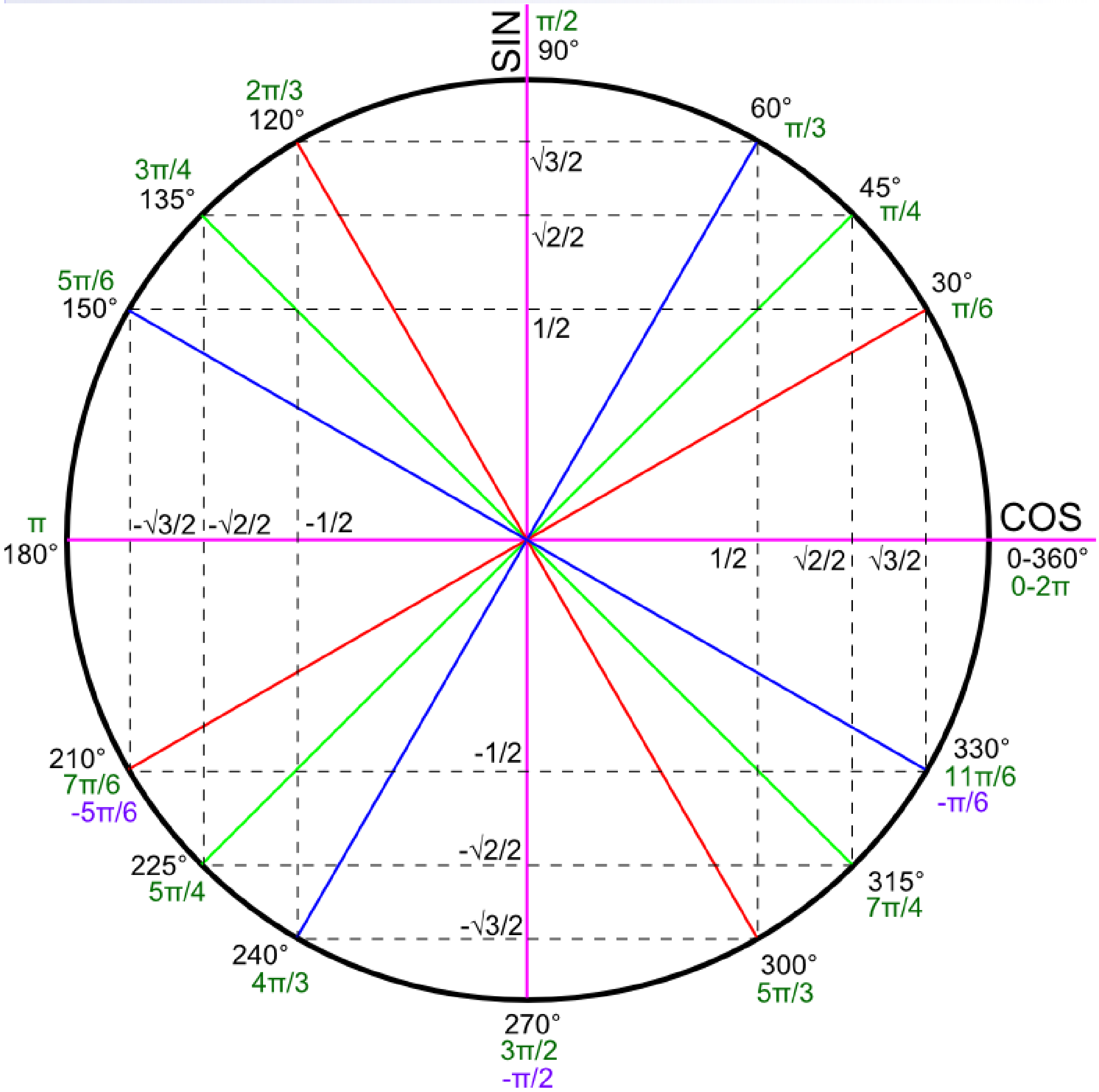
La courbe Sinus est obtenue à partir du lieu du point *S1* dont l'abscisse est l'angle *a* en Radians et l'ordonnée, l'ordonnée du point *M* sur le cercle. Les points *M* et *S1* ont donc même ordonnée.



B. Valeurs particulières

Fondamental : Valeurs remarquables de sin et cos à connaître

x **en degrés**	0°	30°	45°	60°	90°
x **en radians**	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



De ce tableau, et à l'aide du cercle trigonométrique ci-dessus, on déduit aisément les valeurs remarquables de sinus et cosinus pour les angles entre 0 et 2π ou entre $-\pi$ et π

Remarque : Démonstration

Les valeurs du tableau se démontrent facilement par de la géométrie de collège.

Nous avons vu précédemment la démonstration de $cos60° = \frac{1}{2}$. Le théorème de Pythagore et les symétries permettent de montrer les autres valeurs de cosinus et sinus pour les angles de 30° et 60°

Pour l'angle de 45°, il suffit de savoir que la longueur de la diagonale d'un carré de coté 1 est $\sqrt{2}$

Dès lors, par simple proportionnalité, la longueur d'un carré dont la diagonale est 1 est $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

coté	1	? ?
diagonale	$\sqrt{2}$	1

C. Propriétés fondamentales

Fondamental : Dérivées des fonctions sin et cos (admise)

Les fonctions Sinus et Cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

- $\cos'(x) = -\sin x$
- $\sin'(x) = \cos(x)$

Complément

Étant **dérivables**, elles sont aussi **continues** sur $\mathbb{R}$

Exemple

Soit $f \ : x \longmapsto \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

$f'(x) = -3 \times \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

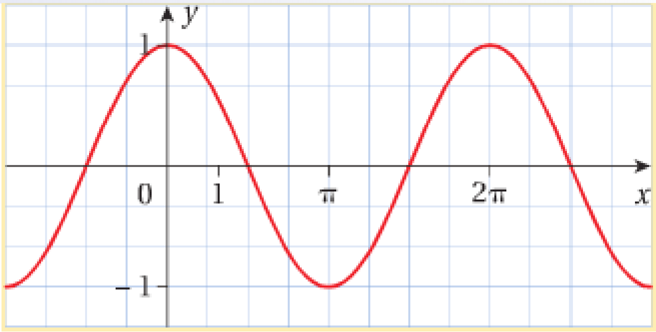
D'après la formule sur la *dérivée d'une fonction composée* - p.27.

D. Étude sur [0 ;π]

Fondamental : Fonction Cosinus

x	0		π
$f'(x) = -\sin x$	0	$-$	0
$f : x \mapsto \cos x$	1	$\searrow$	-1

Variations de la fonction Cosinus sur [0 ;π]

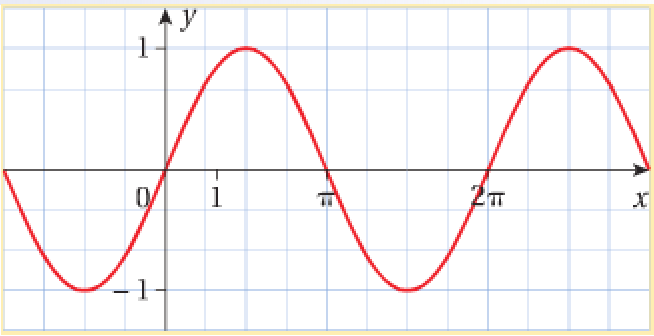


Représentation de la fonction Cosinus sur [0 ;π]

Fondamental : Fonction Sinus

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x) = \cos x$	1	$+$	0	$-$	-1
$f : x \mapsto \sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Variations de la fonction Sinus sur [0 ;π]



Représentation de la fonction Sinus sur [0 ;π]

E. Exercice

Soit f la fonction définie sur $I = [0\,;2\pi]$ par $f\ : x \longmapsto \sin x + \cos x$

Question 1

[Solution n°1 p 23]

Justifier que f est dérivable sur et calculer f'

Question 2

[Solution n°2 p 23]

En étudiant les positions relatives de Cosinus et Sinus, préciser le signe de f' sur I puis dresser le tableau de variations de la fonction f sir I

Parité - Périodicité

II

Objectifs

Découvrir les concepts de parité et de périodicité au travers de l'exemple des fonctions Sinus et Cosinus

A. Fonction périodique

Définition

Une fonction *f* est *périodique* de *période T* sur $\mathbb{R}$ si et seulement si par définition pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$

Exemple : Sinus et Cosinus

On a vu lors de l'*enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique* - p.27 qu'ajouter 2π à *x* revenait à faire un tour complet du cercle trigonométrique. Ainsi les nombres x et $x + 2\pi$ ont même image sur le cercle trigonométrique.

On en déduit ainsi que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

En d'autre termes, les fonctions Sinus et Cosinus sont **périodiques** de période 2π

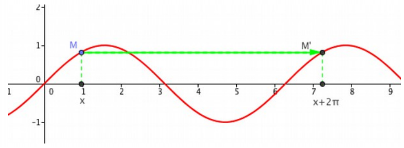
Complément

4π, 6π, -2π etc... sont aussi des périodes pour Sinus et Cosinus. Généralement, on considère plutôt la plus petite période positive.

Il est très fréquent de trouver des fonctions périodiques dès lors que l'on travaille avec les fonctions Sinus et Cosinus. Néanmoins la période peut varier en fonction de ce que l'on trouvera à l'intérieur des foncions Sinus et Cosinus.

Remarque : Interprétation graphique

Les fonctions Sinus et Cosinus sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$



B. Etude de périodicité

Question

[*Solution n°3 p 25*]

Montrer que la fonction $f\ : x \longmapsto \sin(2x) - 2\cos(x/2)$ est périodique de période 4π

C. Fonctions paires

Définition

Une fonction est paire si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x)$

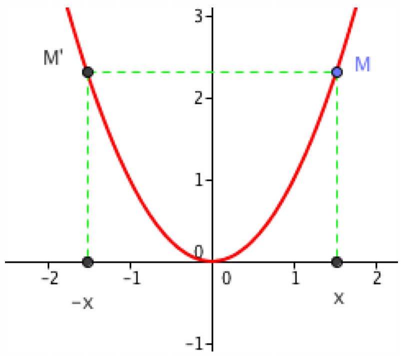
Complément : Interprétation géométrique

La courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**

Exemple : La fonction carré

La fonction $x \longmapsto x^2$ est une fonction paire.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}, (-x)^2 = x^2$



La parabole représentant la fonction carré admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

D. Fonctions impaires

Définition

Une fonction est impaire si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$

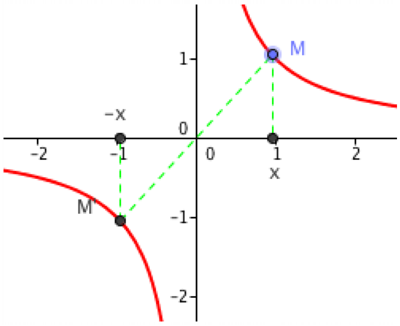
Complément : Interprétation géométrique

La courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'origine** du repère.

Exemple : La fonction inverse

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est une fonction paire.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R} - 0, \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$



Les deux branches d'hyperbole représentant la fonction inverse sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

E. Parité des fonctions Sinus et Cosinus

Fondamental

La fonction $x \longmapsto \sin x$ est une fonction impaire
La fonction $x \longmapsto \cos x$ est une fonction paire

Complément : Démonstration

Il suffit de se rappeler les *propriétés fondamentales* - p.28 de Sinus et Cosinus :
$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$

F. Exemple de parité

On considère $f\ : x \longmapsto \cos(2x) - \sin(x^2)$

Question 1

[*Solution n°4 p 26*]

Déterminer la parité de *f*

Indices :

Il s'agit de savoir si la fonction f est paire, impaire ou rien du tout.
Dans ce cas, on pourra calculer $f(-x)$

Question 2

[*Solution n°5 p 26*]

Interpréter ce résultat graphiquement

Question 3

[*Solution n°6 p 26*]

Étudier la dérivabilité de f et la parité de f'
Ce résultat en réalité peut se généraliser à n'importe quelle fonction paire dérivable.

Question 4

[*Solution n°7 p 26*]

Soit f une fonction **paire dérivable** sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que f' est **impaire**.

Test final sur la trigonométrie

III

Pour ce test d'auto-évaluation final, vous devez obtenir un minimum de 80% de bonnes réponses. En cas d'échec, révisez la section du cours qui vous a posé des difficultés et retentez à nouveau le test.

Exercice 1

La fonction $x \longmapsto -2\sin x$ *est :*

- ○ croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$
- ○ décroissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$
- ○ décroissante sur l'intervalle $[0\,;\pi]$

Exercice 2

La fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\pi[$ *par* $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ *admet pour fonction dérivée*

- ○ $f'\ : x \longmapsto \dfrac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$
- ○ $f'\ : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$
- ○ $f'\ : x \longmapsto -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Exercice 3

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \sin^2 x$ *admet pour fonction dérivée*

- ○ $f'\ : x \longmapsto 2\sin x \cos x$
- ○ $f'\ : x \longmapsto 2\cos x$
- ○ $f'\ : x \longmapsto \cos^2 x$

Exercice 4

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ *admet pour fonction dérivée*

- ○ $f' : x \longmapsto -\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
- ○ $f' : x \longmapsto 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
- ○ $f' : x \longmapsto -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 5

La fonction $f : x \longmapsto \sin x - \cos x$

- ○ est paire
- ○ est impaire
- ○ n'est ni paire ni impaire

Solution des exercices

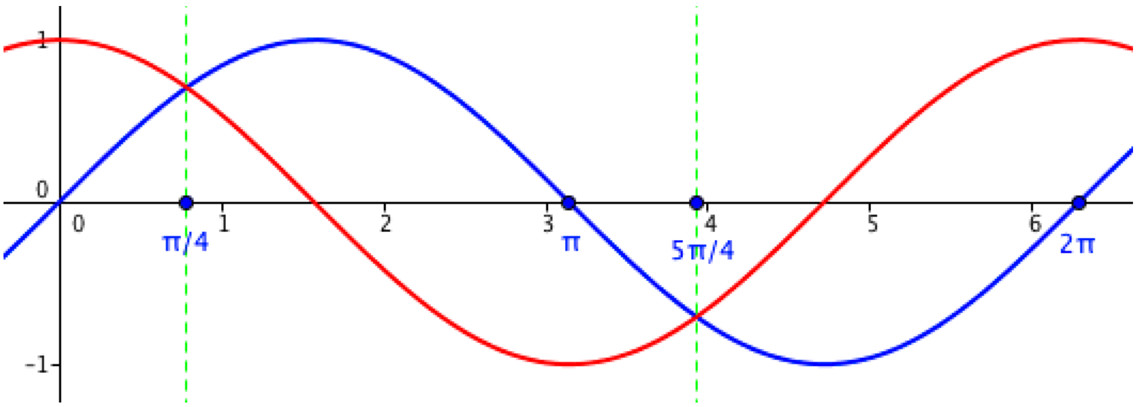
> Solution n°1 *(exercice p. 13)*

Les fonctions Sinus et Cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la **somme** de ces deux fonctions est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$

On a $f'(x) = \cos x - \sin x$

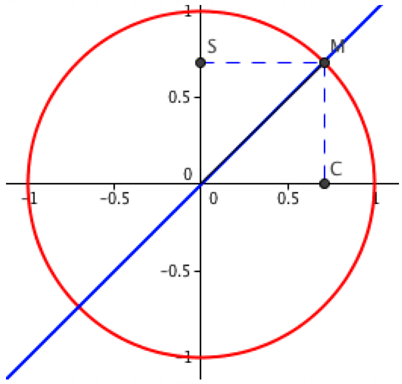
> Solution n°2 *(exercice p. 13)*

Étudier le signe de $f'(x) = \cos x - \sin x$ revient à étudier la position relative des courbes représentant les fonctions Sinus et Cosinus. Observons le tracé de ces deux courbes sur la calculatrice :



Méthode : Résoudre l'équation Sin x= Cos x

L'observation du graphique montre qu'il nous faut déterminer les deux valeurs pour lesquelles $\sin x = \cos x$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$



Si l'on se rappelle la définition géométrique de Cosinus et Sinus, les valeurs de x recherchées sont celles pour lesquelles l'abscisse et l'ordonnée du point M sont égales. Il nous faut donc déterminer les deux points d'intersection du cercle trigonométrique avec la droite d'équation $y = x$

La première correspond à la valeur remarquable $x = \frac{\pi}{4}$ dont *on sait* que le Sinus et le Cosinus valent tous deux $\frac{\sqrt{2}}{2}$

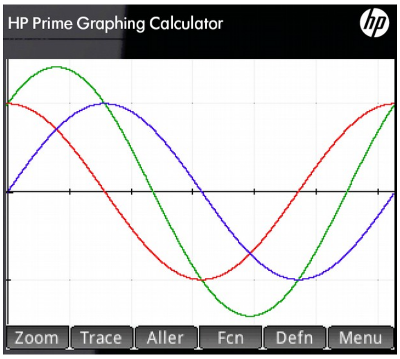
La seconde correspond à la valeur remarquable $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ dont *on sait* que le Sinus et le Cosinus valent tous deux $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi, en observant les courbes représentatives de Sinus et Cosinus, on obtient :

- Si $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}\,;2\pi\right], \cos x > \sin x$ donc $f'(x) > 0$
- Si $x \in \left]\frac{\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right[, \cos x < \sin x$ donc $f'(x) < 0$

On en déduit le tableau de variations suivant pour la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$

$$\begin{array}{|c|ccccccc|}
\hline
x & 0 & & \frac{\pi}{4} & & \frac{5\pi}{4} & & 2\pi \\
\hline
f'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\
\hline
 & & & \sqrt{2} & & & & 1 \\
f(x) & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & 1 & & & & -\sqrt{2} & & \\
\hline
\end{array}$$



On vérifie à l'aide de la calculatrice la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$

> Solution n°3 *(exercice p. 16)*

On a $\cos\left(\dfrac{x+4\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{4\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ car on sait que la fonction Cosinus est périodique de période 2π

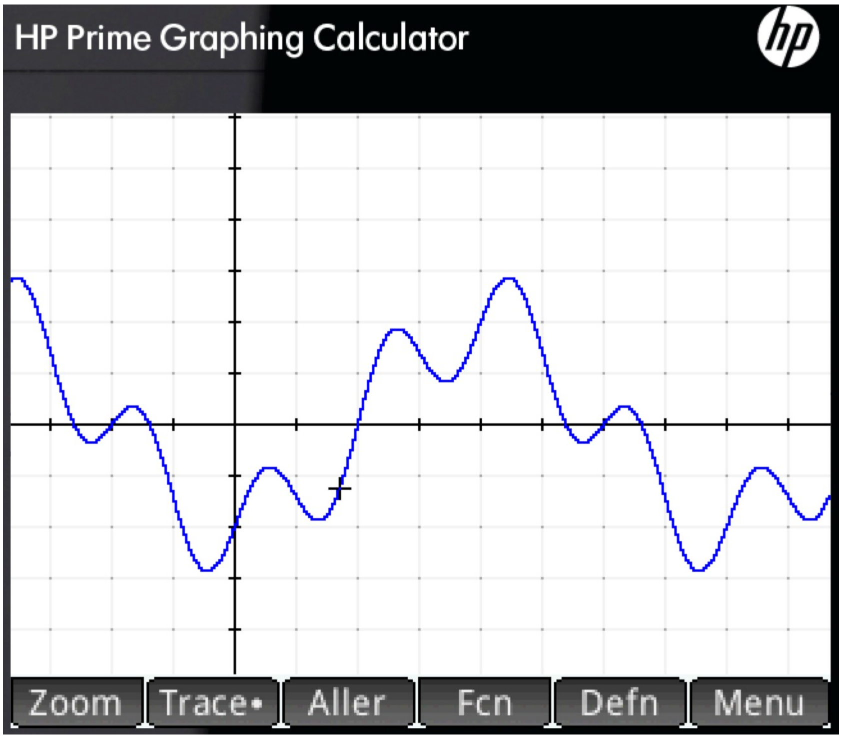
De plus $\sin(2(x+4\pi))=\sin(2x+8\pi)=\sin(2x+2\pi+2\pi+2\pi+2\pi)=\sin(2x)$ car on sait que la fonction Sinus est périodique de période 2π

Donc on a montré que

pour tout $x\in\mathbb{R}$

$f(x+4\pi)=\sin(2(x+4\pi))-2\cos\left(\dfrac{x+4\pi}{2}\right)=\sin(2x)-2\cos(x/2)=f(x)$.

La fonction *f* est donc périodique de période 4π



> Solution n°4 *(exercice p. 18)*

Méthode

Calculons $f(-x) = \cos(-2x) - \sin((-x)^2)$

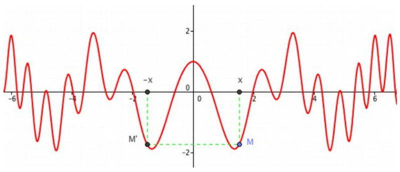
Or on sait que

- $\cos(-2x) = \cos(2x)$
- $(-x)^2 = x^2$

Donc $f(-x) = \cos(2x) - \sin(x^2) = f(x)$

La fonction *f* est donc paire.

> Solution n°5 *(exercice p. 18)*



La courbe représentative de la fonction f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie

> Solution n°6 *(exercice p. 18)*

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car les fonctions Sinus et Cosinus le sont ainsi que les fonctions à l'intérieur : $2x$ et x^2. La composition et la somme de ces fonctions ne pose donc pas de problèmes de dérivabilité.

$f'(x) = -2\sin(2x) - 2x\cos(x^2)$

$f'(-x) = -2\sin(-2x) - 2(-x - \cos((-x)^2) = 2\sin(2x) + 2x\cos(x^2) = -f'(x)$

La fonction f' est donc $impaire$

> Solution n°7 *(exercice p. 19)*

f étant paire, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$

- Dérivons le membre de gauche de l'égalité :$(f(-x))' = -f'(-x)$ d'après les *propriétés de la dérivation* - p.27 rencontrées précédemment.
- Dérivons le membre de droite : $f(x)' = f'(x)$

L'égalité des deux fonctions f(-x) et f(x) entraîne également l'égalité des dérivées.

On en conclut que $f'(x) = -f'(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ce qui démontre que la fonction *f'* est impaire.

Contenus annexes

- Dérivée de f(ax+b)

Méthode

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et soient a et b deux nombres réels

Alors la fonction dérivée de $f(ax+b)$ est $a \times f'(ax+b)$

Exemple

La dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ est $f'(x) = 3 \times \dfrac{-1}{(3x+2)^2}$

Exemple

La dérivée de $f(x) = \sqrt{2-5x}$ est $f'(x) = -5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{2-5x}}$

Attention

Cette formule ne s'applique que dans le cas où la fonction contenue dans f est une fonction affine.

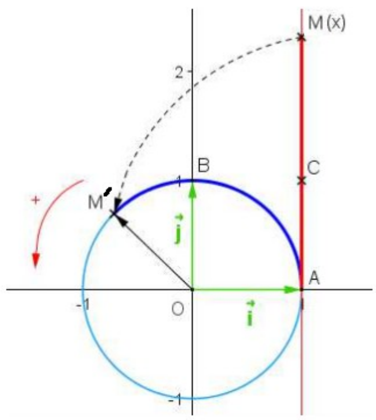
On ne peut pas utiliser cette formule pour dériver $f(x) = \sqrt{2-5x^2}$

- Correspondance entre abscisse et angle

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π. Ainsi au point M d'abscisse 2π on fait correspondre le point M' du cercle trigonométrique tel que l'angle $\widehat{AOM'} = 360°$.

A la longueur π correspond un demi-tour, soit un angle $\widehat{AOM'} = 180°$° etc...

En règle générale, il y a proportionnalité entre l'abscisse du point M et la mesure en degré de l'angle $\widehat{AOM'}$ comme le montre le tableau ci-dessous.



Abscisse du	-2π	π	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	0	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π

point M sur la droite numérique									
Angle $\widehat{AOM'}$ en degré	-360°	-180°	-90°	-45°	0	45°	90°	180 °	360°

- Propriétés des fonctions sin et cos

Fondamental

Pour tout nombre réel *x* , on a :

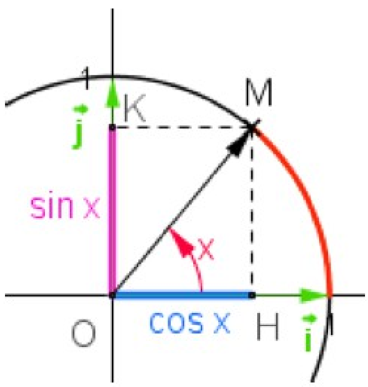
1. $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
3. $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$

Remarque : Notation

On note souvent $\cos^2 x$ pour désigner $(\cos x)^2$ et $\sin^2 x$ pour $(\sin x)^2$

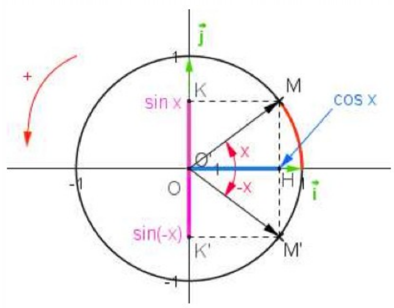
Complément : Démonstration des propriétés

1. La première propriété découle du fait que le sinus et le cosinus sont les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1. Ces coordonnées sont donc nécessairement comprises entre -1 et 1.



2. La seconde propriété découle de l'utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHM, sachant que $OM^2 = 1$

3. Pour la dernière propriété, on remarquera que si un point *M* correspond à un angle *x* par enroulement de la droite numérique, l'angle *-x* revient à faire un **enroulement dans le sens contraire** et amène à un point *M'* symétrique de *M* par rapport à l'axe des abscisses.



- Les **abscisses** de M et M' sont **identiques**
- Les **ordonnées** de M et M' sont **opposées**

On en déduit les dernières égalités.