Terminale S

# Probabilités conditionnelles

1.0


Olivier Lécluse


Juillet 2013

# Table des matières

# Objectifs

Vous découvrirez dans ce nouveau chapitre comment traiter les problèmes de probabilités sur des **événements non indépendants**. Vous apprendrez :

- à construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée,
- à exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités,
- à calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une *partition de l'univers*.

Pour bien commencer dans ce nouveau chapitre, je vous invite à réviser le *chapitre de probabilités*[1] de l'an dernier ainsi que le chapitre sur la *loi binomiale*[2] qui traite de la répétition d'expériences indépendantes du type Succès/Échec.

1 - http://lcs.allende.lyc14.ac-caen.fr/~lecluseo/1ES/Proba_web/web/
2 - http://lcs.allende.lyc14.ac-caen.fr/~lecluseo/1ES/Loibinomiale/web/

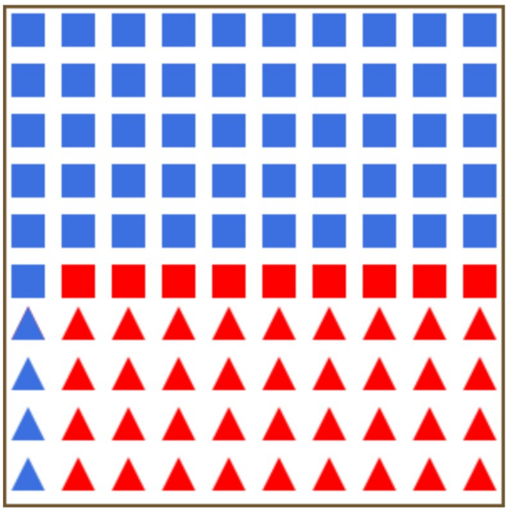
# Conditionnement par un événement

I



## A. Exercice : Activité préparatoire

*On considère la figure suivante composée de 100 figures carrées ou triangulaires de couleur rouge ou bleue. On choisit au hasard par une main innocente une figure. On s'intéresse à différents cas de figure.*



### Exercice

*Quelle est la probabilité de choisir une figure de forme carrée ?*

## Exercice

*Quelle est la probabilité de choisir une figure de couleur rouge ?*

## Exercice

*Sachant que l'on a tiré une figure de couleur rouge, quelle est la probabilité que celle-ci soit un carré ?*

## Exercice

*Si on note :*

- $P(R)$ *la probabilité de choisir une figure Rouge*
- $P(C)$ *la probabilité de choisir une figure Carrée*

$P(R \cap C)$ *désigne :*

- ○ La probabilité de choisir une figure rouge **ou** une figure carrée
- ○ La probabilité de choisir une figure rouge **et** une figure carrée

## Exercice

*Calculer* $P(R \cap C)$.

## Exercice

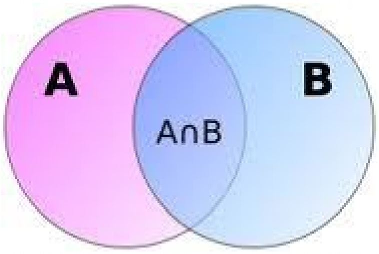
*On note* $P_R(C)$ *la probabilité de choisir une figure carrée* ***sachant que*** *la figure est rouge.*

*D'après les observations faites aux questions précédentes, cochez la ou les formule(s) qui conviennent.*

- ☐ $P_R(C) = P(R) \times P(C)$
- ☐ $P_R(C) = \dfrac{P(C)}{P(R)}$
- ☐ $P_R(C) = \dfrac{P(R \cap C)}{P(R)}$
- ☐ $P(R \cap C) = P(R) \times P_R(C)$

## B. Probabilité de B sachant A

### Définition




Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La probabilité que l'événement B se produise sachant que l'événement A est réalisé est noté $P_A(B)$ et se calcule par la formule $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

### Complément

$P_A(B)$ se lit *probabilité de B sachant A*.

### Exemple

On lance deux dés équilibrés à 6 faces, un vert et un violet. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 10 sachant que le violet indique 4 ?

L'univers Ω associé à cette expérience est celui constitué des couples (1,1), (1,2), ..., (6,6). Il comporte **36 éventualités**.

- A est l'événement "Le dé violet indique 4"
- B est l'événement "La somme des deux dés donne 10"

$A \cap B$ est donc l'événement "Le dé violet donne 4 **et** la somme des deux dés donne 10". Sachant que le dé violet donne 4, le dé vert donne alors 6.

Il n'y a donc qu'une seule éventualité sur les 36 possibles réalisant cet événement.

Donc $P(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$

De même le dé étant équilibré, on sait que :

$P(A) = \dfrac{1}{6}$

La probabilité de faire 10 sachant que le dé violet donne 4 est donc :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

## C. Probabilités composées

On sait que si A et B sont deux événements, A étant possible, $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. En multipliant cette égalité par $P(A)$ non nul, on en déduit la formule suivante :

### Fondamental

Si l'on connaît la probabilité de l'événement A et la probabilité de l'événement **B sachant que A est réalisé**, la probabilité de l'événement $A \cap B$ est

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

### *Exemple*

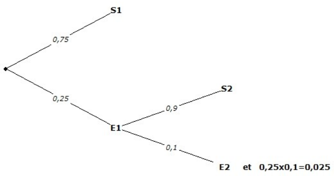
Un joueur de tennis réussit sa première balle de service à 75% et sa deuxième balle à 90%. Quelle est la probabilité qu'il commette une double faute ?

- Si l'événement A est "le joueur rate sa première balle".
  On sait d'après l'énoncé que $P(A) = 1 - 0,75 = 0,25$.
- L'événement B est "Le joueur rate sa seconde balle"et l'événement $\bar{B}$ est "Le joueur réussit sa deuxième balle".
- L'événement B sachant A est "le joueur rate sa seconde balle sachant qu'il a raté la première également".
  On a d'après l'énoncé que $P_A(B) = 1 - P_A(\bar{B}) = 1 - 0,9 = 0,1$

La double faute est l'événement $A \cap B$. Or $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,25 \times 0,1 = 0,025$

La probabilité que le joueur rate ses deux services est de 0,025.

Visuellement cette situation se représente aisément à l'aide d'un arbre pondéré.




- E1 et S1 représentent successivement l'échec et le succès au premier service.
- E2 et S2 représentent successivement l'échec et le succès au second service.

On constate que la probabilité d'avoir une double faute correspond à la probabilité de la feuille E2. Celle-ci s'obtient d'après la formule précédente en faisant le produit des probabilités des branches menant à cette feuille.

### *Remarque*

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a :
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$

## D. Représentation par un arbre pondéré

### *Méthode : Propriétés des arbres*

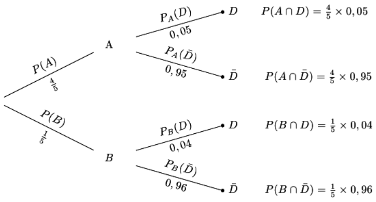
1. La probabilité d'une feuille est le produit des probabilités indiquées sur les branches du chemin menant à cette feuille.
2. La somme des probabilités indiquées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

### *Exemple*

Dans une usine, $\frac{4}{5}$ des pièces sont fabriquées par une machine A, et $\frac{1}{5}$ par une machine B.

On estime que 5% des pièces fabriquées par la machine A sont défectueuses et que 4% le sont quand elles proviennent de la machine B.

On peut représenter la situation par l'arbre ci-contre :




Par exemple, la probabilité qu'une pièce soit fabriquée par la machine A et soit défectueuse est $P(A \cap D) = \frac{4}{5} \times 0,05 = 0,01$.
La probabilité qu'une pièce soit fabriquée par la machine B et ne soit pas défectueuse est $P(B \cap \bar{D}) = \frac{1}{5} \times 0,96 = 0,192$.

# E. Construire et utiliser un arbre pondéré

A la session 2009 du Bac, 286 762 élèves inscrits en série générale ont été admis. En particulier 47 765 en série L, 90 466 en série ES et 148 531 en série S. Le tableau suivant présente la proportion de bacheliers ayant obtenu une mention :

| | Mention Assez Bien | Mention Bien ou Très Bien |
|---|---|---|
| Série L | 27,3% | 16,1% |
| Série ES | 28,8% | 15,3% |
| Série S | 29,2% | 30,9% |

On interroge au hasard un bachelier en série générale de cette session 2009.

## Question 1

[*Solution n°1 p 27*]

Construire un arbre pondéré traduisant la situation. On utilisera les notations suivantes :

- L : événement "le bachelier a suivi la filière L"
- E : événement "le bachelier a suivi la filière ES"
- S : événement "le bachelier a suivi la filière S"
- R : événement "le bachelier a été reçu sans mention"
- A : événement "le bachelier a éré reçu mention AB"
- B : événement "le bachelier a été reçu mention B ou TB"

On arrondira les probabilités au millième près.

*Indices :*

*Calculer P(L), P(E) et P(S) en utilisant les effectifs fournis en introduction du problème.*

*Les éléments du tableau s'interprètent comme des probabilités conditionnelles. Ainsi par exemple la probabilité d'avoir obtenu Assez bien sachant qu'on a suivi la série L est 27,3% soit 0,273. Cela s'écrit* $P_L(A) = 0,273$

*Connaissant les probabilités des mentions, il est facile par complément à 100% d'obtenir pour chaque filière les probabilités de l'événement R représentant les mentions passables.*

## Question 2

[Solution n°2 p 27]

Quelle est la probabilité qu'un bachelier interrogé au hasard ait obtenu une mention AB dans la série ES ?

*Indice :*

*L'événement correspondant à la question est $E \cap A$.*

# Partition de l'univers

II



Dans les règles de construction d'un arbre pondéré, on se souvient que la somme des probabilités indiquées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1. Nous allons voir que les événements situés au premier niveau de l'arbre forment ce que l'on appelle *une partition de l'univers*.

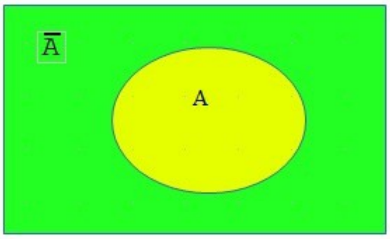
## A. Définition

### *Définition*

On dit que que *n* événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition d'un univers *Ω* lorsque l'on a :

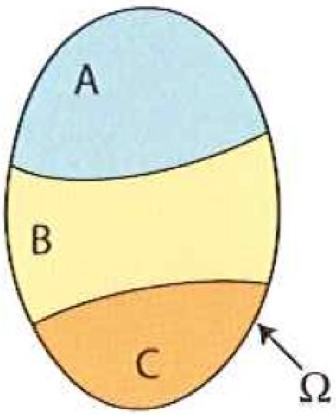
- La réunion des événements forme l'univers : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$
- Les événements sont incompatibles deux à deux : $i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$

### *Exemple*




Si $A$ est un événement et $\bar{A}$ son contraire, alors $A$ et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers.

### Exemple




Sur la figure ci-contre, on a les deux conditions réunies :

- $A \cup B \cup C = \Omega$
- $A \cap B = \emptyset$ et $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$

Les événements A, B et C forment donc une partition de l'univers Ω

### Exemple

Dans l'exemple de l'exercice de la fin du chapitre précédent, les bacheliers L, ES et S forment une partitions de l'ensemble des bacheliers de la filière générale.

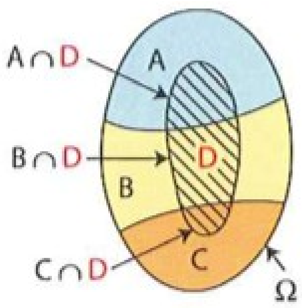
## B. Formule des probabilités totales

### Rappel

On se rappelle de cette *formule de la classe de seconde* - p.35 sur la probabilité de l'union de deux événements.

Le cas particulier en cas d'événements disjoints s'applique très bien à la situation d'une partition de l'univers en plusieurs événements.

Supposons que l'univers Ω possède une partition en trois événements A, B et C et que nous connaissons les probabilités conditionnelles d'un événement D sachant A, B et C. On sait :




- d'une part que

  $D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$,
- d'autre part que $(A \cap D)$, $(B \cap D)$ et $(C \cap D)$ sont disjoints.

Donc $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$.

Par conséquent $P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$

Par conséquent on peut calculer la probabilité d'un événement sachant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

### *Méthode : Traduction sur un arbre pondéré*

Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un événement D associé à plusieurs feuilles est égale à la somme des probabilités de chacune de ces feuilles.

### Exemple

Un magasin de sport propose des réductions sur les 3 marques qu'il distribue.

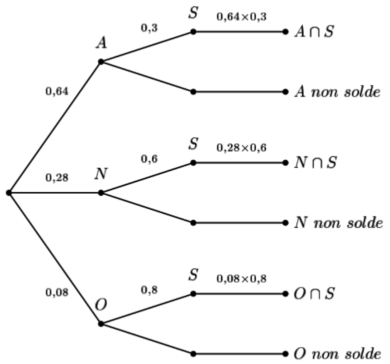
La marque A représente 64% des ventes, la marque N représente 28% et la marque O représente 8%.

On sait que sont soldés 30% des vêtements de la marque A, 60% de la marque N et 80% de la marque O.

Quel pourcentage au total des vêtements vendus par ce magasin est soldé ?

On sait que les événements A, N et O représentent une partition de l'univers Ω des vêtements vendus car

- un vêtement ne peut pas être de deux marques à la fois
- il n'y a pas d'autre marque en magasin puisque 64%+28%+8%=100% des vêtements.




On connaît les probabilités conditionnelles pour chacune des marques relatives au soldes : $P_A(S) = 0,3$, $P_N(S) = 0,6$ et $P_O(S) = 0,8$

On en déduit la probabilité qu'un article soit soldé par la somme

$P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(N) \times P_N(S) + P(O) \times P_O(S)$

Donc $P(S) = 0,64 \times 0,3 + 0,28 \times 0,6 + 0,08 \times 0,8 = 0,424$

Par conséquent 42,4% des vêtements vendus par ce magasin sont soldés.

## C. Exercice d'application

Dans un lycée, 31% des élèves appartiennent à la section ES, 50% à la section S et les autres élèves à la section L.

15% des élèves du lycée sont des filles de L. Parmi les élèves de ES, 62% sont des filles. Parmi les élèves de S, 54% sont des garçons.

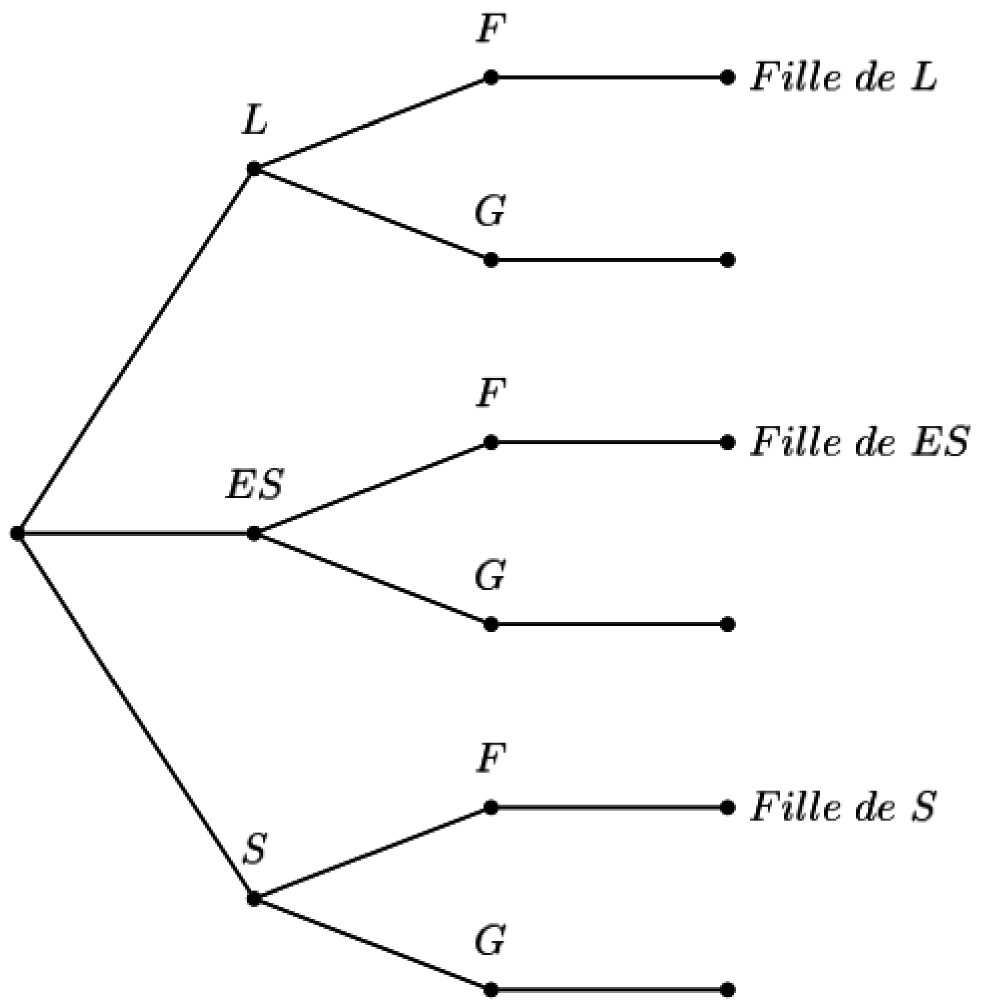
### Question

[*Solution n°3 p 28*]

On interroge au hasard un élève du lycée. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

*Indice :*

*Recopier et compléter l'arbre ci-dessous avec les données du problème.*


F
Fille de L
L
G
F
Fille de ES
ES
G
F
Fille de S
S
G

# Indépendance de deux événements

III



## A. Définition

### *Définition : Indépendance de deux événements*

Soit *p* une probabilité sur un univers $\Omega$

On dit que les *événements A et B sont indépendants* si :

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

### *Attention : Ne pas confondre indépendant et incompatible*

Deux événements sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$ ce qui n'est pas la même chose

### *Fondamental*

Si $p(A) \neq 0$, alors **A et B sont indépendants si et seulement si** $p_A(B) = p(B)$

de même si $p(B) \neq 0$, alors **A et B sont indépendants si et seulement si** $p_B(A) = p(A)$

### *Complément : Démonstration*

On suppose que $p(A) \neq 0$. A et B sont indépendants revient à dire que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Dans ce cas, $p_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{p(A) \times p(B)}{p(A)} = p(B)$. CQFD

### *Exemple*

Pour le lancer d'un dé équilibré à 6 faces, on considère les événements suivants

- A : *« le résultat est pair »*

- B : « *le résultat est 2* »

Intuitivement, on voit bien que A et B ne sont pas indépendants. De fait, $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $p(A) \times p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$

Si on considère à présent l'événement C : « *le résultat est supérieur ou égal à 5* », alors A et C sont indépendants.

En effet $p(C) = \frac{1}{3}$ donc $p(A) \times p(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

et $p(A \cap C) = \frac{1}{6}$ car seul 6 est pair et supérieur ou égal à 5. Donc $p(A \cap C) = p(A) \times p(C)$

## B. Exercice

Matthieu, élève de seconde, possède son téléphone portable depuis qu'il est entré au collège. Il hésite à en changer. En se rendant chez son opérateur, il apprend que

- la probabilité que « *le téléphone tombe en panne à cause d'un défaut de composants* », appelé événement $C$, est de 0,2
- la probabilité que « *le téléphone tombe en panne à cause de la carte SIM* », appelé événement $S$, est de 0,4

Ces deux événements sont supposés indépendants.

### Question

[*Solution n°4 p 28*]

Matthieu décide qu'il changera son téléphone si il y a plus d'une chance sur deux que celui-ci tombe en panne.

Doit-il changer son téléphone portable ?

*Indices :*

*On pourra calculer la probabilité que son téléphone tombe en panne.*

*Une panne peut être du à un composant ou à un défaut de SIM. La probabilité cherchée est donc* $p(C \cup S)$

## C. Indépendance et événement contraire

### Fondamental

Si $A$ et $B$ sont deux événements **indépendants**, alors $\bar{A}$ et $B$ le sont aussi

Si $A$ et $B$ sont deux événements **indépendants**, alors $\bar{B}$ et $A$ le sont aussi

### Complément

La démonstration fait l'objet d'une ROC :)

### Remarque

Supposons que $p(A) \neq 0$, il découle de la propriété précédente que $p_A(B) = p_{\bar{A}}(B)$ ce qui signifie que la réalisation ou non de l'événement A n'influe pas sur la réalisation de l'événement B.

## D. ROC : Indépendance et événement contraire

Si $A$ et $B$ sont deux événements **indépendants**, alors $\bar{A}$ et $B$ le sont aussi

Question

[*Solution n°5 p 28*]

ROC : Démontrer ce résultat

## E. Exercice

Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux événements indépendants :

- R : *« il n'entend pas son réveil sonner »*
- S : *« son scooter, mal entretenu, tombe en panne »*

Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de l'événement R est 0,1 et que celle de l'événement S est 0,05.

Lorsque au moins l'un des deux événements se produit, Stéphane est en retard, sinon, il est à l'heure.

Question 1

[*Solution n°6 p 28*]

Calculer la probabilité qu'un jour de classe donnée, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

Question 2

[*Solution n°7 p 29*]

Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe

Question 3

[*Solution n°8 p 29*]

Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois en classe. On admet que le fait d'arriver éventuellement en retard un jour de classe n'influe pas sur le fait d'arriver à l'heure les jours suivants.

La vie scolaire colle les élèves présentant plus d'un retard par semaine. Quelle est la probabilité pour une semaine prise au hasard, que Stéphane soit collé ?

*Indice :*

*On se remémorera le chapitre sur la loi binomiale - p.36*

## F. Marche aléatoire (TP3 p382)

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cet puce se déplace sur trois cases notées **A**, **B** et **C**. À l'instant 0, la puce est en **A**.

pour tout entier naturel $n$:

- si à l'instant $n$ la puce est en **A**, alors à l'instant $n+1$, la puce est
  - soit en **B** avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$

  - soit en **C** avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$
- si à l'instant *n* la puce est en **B**, alors à l'instant *n+1*, la puce est
  - soit en **A** avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$
  - soit en **C** avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$
- si à l'instant *n* la puce est en **C,** alors elle y reste.

On note $A_n$ (respectivement $B_n$ et $C_n$) l'événement « *à l'instant n la puce est en* ***A*** » (respectivement **B** et **C**)

On note $a_n$ (respectivement $b_n$ et $c_n$) la probabilité de l'événement $A_n$ (respectivement $B_n$ et $C_n$)

On a donc $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$

## Partie A : Algorithmique

On code la case **A** par 0, la case **B** par 1 et **C** par 2. On nomme

- *pos* la variable qui contient la position de la puce à un instant donné, c'est à dire la valeur 0, 1 ou 2.
- *tirage* la variable qui contiendra un tirage aléatoire d'un nombre entre 0 et 1

### Question 1

[*Solution n°9 p 29*]

Recopier et compléter les ? ? ? dans l'algorithme ci-dessous pour simuler le passage de l'instant donné à l'instant suivant.

```
pos contient la position de la puce
tirage prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
Si pos=0,
... Si tirage < 1/3,
... ... a prend la valeur ? ? ?
... Sinon,
... ... a prend la valeur ? ? ?
... Fin Si
Sinon Si pos=1,
... Si tirage<1/2,
... ... a prend la valeur ? ? ?
... Sinon,
... ... a prend la valeur ? ? ?
... Fin Si
Sinon si pos=2
... a prend la valeur ? ? ?
Fin Si
pos prend la valeur ? ? ?
```

### Question 2

[*Solution n°10 p 30*]

Compléter l'algorithme pour simuler une marche aléatoire à *n* étapes, *n* étant donné par l'utilisateur au départ

### Question 3

[*Solution n°11 p 30*]

Compléter à nouveau l'algorithme de manière à simuler 1000 marches de *n* étapes et afficher les fréquences d'arrivée en A, B et C au cours de ces 1000 marches

### Question 4

[*Solution n°12 p 31*]

Programmer cet algorithme dans le langage de votre choix.

On prendra n=4.

Quelles fréquences obtenez-vous ?

## Partie B : Théorie

Nous allons à présent calculer les probabilités théoriques et confronter ces résultats avec la simulation réalisée ci-dessus.

### Question 5

[*Solution n°13 p 32*]

Illustrer par un arbre pondéré les positions possibles de la puce aux instants *n* et $n+1$

Calculer ensuite $a_k, b_k$ et $c_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant 3$

### Question 6

[*Solution n°14 p 33*]

Montrer que pour tout entier naturel *n*, $a_{n+2} = \frac{1}{6}a_n$

### Question 7

[*Solution n°15 p 33*]

Montrer que pour tout entier naturel *n*, $b_{n+2} = \frac{1}{6}b_n$

### Question 8

[*Solution n°16 p 33*]

Expliquer pourquoi pour tout entier naturel p

- $a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p$ et $a_{2p+1} = 0$
- $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p$

### Question 9

[*Solution n°17 p 34*]

Montrer que pour tout *n*, $a_n + b_n + c_n = 1$

### Question 10

[*Solution n°18 p 34*]

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

En déduite $\lim_{n\to+\infty} c_n$

### Question 11

[*Solution n°19 p 34*]

Cela est-il cohérent avec votre simulation réalisée en partie 1 ?

# Tester ses connaissances

IV

Pour ce test d'auto-évaluation final, vous devez obtenir un minimum de 80% de bonnes réponses. En cas d'échec, révisez la section du cours qui vous a posé des difficultés et retentez à nouveau le test.

## Exercice 1

*Parmi 30 élèves de Terminale, 7 pratiquent l'aïkido et 17 le basket-ball. Trois élèves pratiquent les deux sports.*

*On rencontre un élève au hasard. On note A "l'élève pratique l'aïkido" et B "l'élève pratique le basket-ball".*

- ○ $P_A(B) = 0,75$
- ○ $P_B(A) = \frac{3}{17}$
- ○ $P_B(A) = \frac{7}{17}$

## Exercice 2

*Si A et B sont deux événements d'un même univers Ω tels que l'on ait à la fois :*

- $P(A \cap B) = 0,8$
- $P_A(B) = 0,25$

*Alors :*

- ○ $P(A) = 0,2$
- ○ C'est impossible.
- ○ $P(B) = 0,2$

## Exercice 3

*70% d'une population est vaccinée contre une maladie (V). Parmi les personnes vaccinées, 5% développent la maladie (M). Parmi les personnes non vaccinées, 30% développent la maladie.*

- [ ] 35% de la population développent la maladie.
- [ ] $P(V \cap M) = 0,05$
- [ ] 9% de la population est tombée malade et n'était pas vaccinée.

## Exercice 4

*Dans un sac, Jade a mis 3 jetons rouges, 2 jetons jaunes et 1 jeton vert. Après avoir misé, Sofiane peut jouer.*

*Ce dernier doit tirer un par un les jetons dans le sac tant que le jeton vert n'est pas sorti. Le tirage s'effectue sans remise.*

### Exercice

*Quelle est la probabilité que Sofiane tire le jeton vert lors du premier tirage ?*

- ○ $\frac{1}{6}$
- ○ $\frac{1}{3}$
- ○ $\frac{5}{6}$
- ○ $\frac{2}{3}$

### Exercice

*Quelle est la probabilité que Sofiane tire le jeton vert lors du 3e tirage ?*

- ○ $\frac{1}{6}$
- ○ $\frac{1}{3}$
- ○ $\frac{5}{6}$
- ○ $\frac{2}{3}$

### Exercice

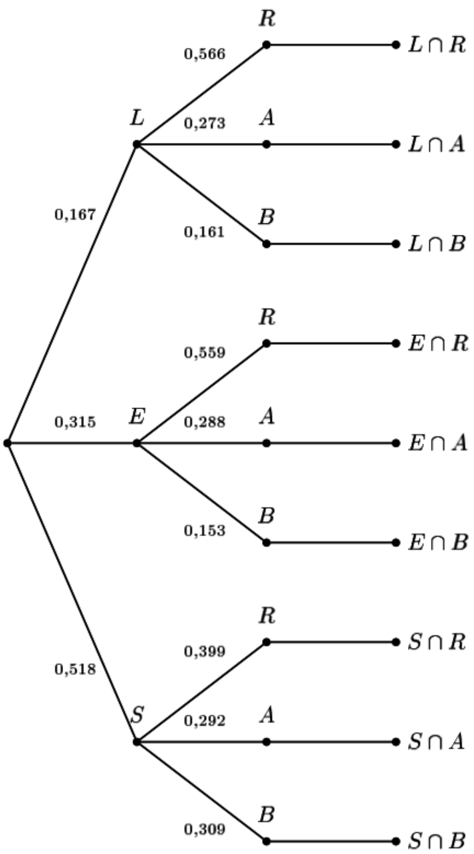
*Sofiane peut récupérer 10 fois sa mise s'il tire les 3 jetons rouges puis les deux jetons jaunes puis le jeton vert dans cet ordre. Quelle est la probabilité d'un tel tirage ?*

- ○ $\frac{1}{60}$
- ○ $\frac{1}{30}$
- ○ $\frac{1}{40}$
- ○ $\frac{1}{50}$

# Solution des exercices

## > Solution n°1 (exercice p. 11)

L'arbre pondéré compte tenu des indications fournies ci-dessus s'obtient alors facilement en reportant les données du problème.

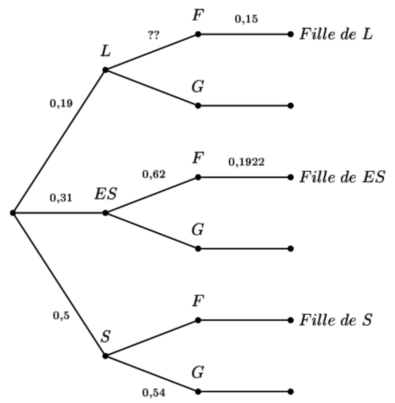



## > Solution n°2 (exercice p. 12)

$P(E \cap A) = P(E) \times P_E(A) = 0,315 \times 0,288 \approx 0,09$

Visuellement sur l'arbre établi à la question précédente, on retrouve ce résultat en multipliant les probabilités des branches menant à la feuille $E \cap A$.

## > Solution n°3 (exercice p. 15)




La probabilité d'avoir une fille du lycée en L nous est donnée.

On peut facilement calculer la probabilité d'avoir une fille de ES par le produit des probabilités sur les branches.

Pour les S, on calcule le pourcentage de filles, soit 47%. On en déduit la probabilité d'avoir une fille de S par $0,5 \times 0,47 = 0,235$.

La probabilité qu'un élève interrogé au hasard dans le lycée soit une fille est donc la somme des probabilités des branches calculées ci-dessus donc $p = 0,15 + 0,1922 + 0,235 = 0,57723$

Environ 58% des élèves de ce lycée sont des filles.

## > Solution n°4 *(exercice p. 18)*

$p(C \cup S) = p(C) + p(S) - p(C \cap S)$ (formule vue en *seconde* - p.35)

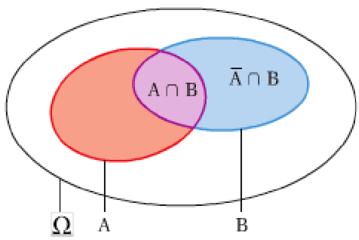
Or C et S sont indépendants donc $p(C \cap S) = p(C) \times p(S) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$

Par conséquent la probabilité d'une panne (composant ou SIM) est $p(C \cup S) = 0,2 + 0,4 - 0,08 = 0,52$

On peut donc supposer que Matthieu changera son téléphone portable.

## > Solution n°5 *(exercice p. 19)*

### *Méthode : **ROC** Démonstration*




- L'événement $A \cap B$ et l'événement $\bar{A} \cap B$ sont deux événements incompatibles.
- La réunion de ces deux événements est l'événement B.

On peut alors écrire que $p(B) = p(\bar{A} \cap B) + p(A \cap B)$

Or A et B sont indépendants donc $p(B) = p(A) \times p(B) + p(\bar{A} \cap B)$

Donc $p(\bar{A} \cap B) = p(B) - p(A) \times p(B)$

En mettant $p(B)$ en facteur : $p(\bar{A} \cap B) = p(B)(1 - p(A))$

Or $1 - p(A) = p(\bar{A})$ donc $p(\bar{A} \cap B) = p(B) \times p(\bar{A})$. CQFD

## > Solution n°6 *(exercice p. 19)*

Il faut calculer $p(\bar{R} \cap S)$.

Or les événements $R$ et $S$ étant indépendants, on en déduit que les événements $\bar{R}$ et $S$ le sont aussi d'après le *résultat vu précédemment*.

Donc $p(\bar{R} \cap S)\ : p(\bar{R}) \times p(S) = 0,9 \times 0,05 = 0,045$

La probabilité que Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne est de 0,045.

## > Solution n°7 *(exercice p. 19)*

Stéphane sera a l'heure si aucun des événements S et R ne se produit. On doit donc calculer $p(\bar{R} \cap \bar{S})$.

Or $\bar{R}$ et $S$ sont indépendants donc $\bar{R}$ et $\bar{S}$ le sont également.

$p(\bar{R} \cap \bar{S}) = p(\bar{R}) \times p(\bar{S}) = 0,9 \times 0,95 = 0,855$

La probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe est de 0,855

## > Solution n°8 *(exercice p. 19)*

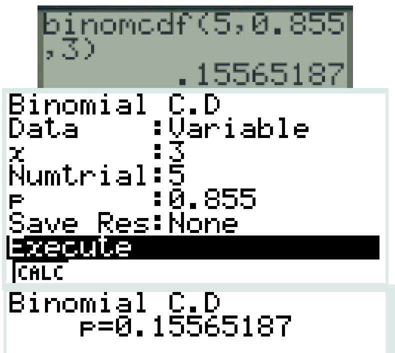
Chaque retard se produisant de manière indépendante, on est dans le cadre d'un *schéma de Bernoulli* - p.36 où on peut supposer que le succès est d'arriver à l'heure. $P(S)\ = 0,855$ d'après la question précédente.

La variable aléatoire qui compte le nombre de retards pour une semaine suit donc une loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(5\ ; 0,855)$

La probabilité d'être collé est donc $p(X \leqslant 3) = 1 - (p(X = 5) - p(X = 4))$. On calcule

- $p(X = 5) = 0,855^5 \approx 0,457$
- $p(X = 4) = \binom{5}{4} \times 0,855^4 \times (1 - 0,855)^1 = 5 \times 0,855^4 \times 0,145 \approx 0,387$

Donc $p(X \leqslant 3) = 0,156$




Ce résultat pouvait être obtenu directement à la calculatrice à l'aide de la fonction `BinomCdf`. La capture ci-contre montre le fonctionnement de la fonction sur TI et Casio.

## > Solution n°9 *(exercice p. 20)*

```
pos contient la position de la puce
tirage prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
Si pos=0,
... Si tirage < 1/3,
... ... a prend la valeur 1
... Sinon,
... ... a prend la valeur 2
... Fin Si
Sinon Si pos=1,
... Si tirage<1/2,
... ... a prend la valeur 0
... Sinon,
... ... a prend la valeur 2
... Fin Si
```

```
Sinon si pos=2
... a prend la valeur 2
Fin Si
pos prend la valeur a
```

## > Solution n°10 (exercice p. 20)

```
n prend une valeur donnée par l'utilisateur
pos prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n,
... tirage prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
... Si pos=0,
... ... Si tirage < 1/3,
... ... ... a prend la valeur 1
... ... Sinon,
... ... ... a prend la valeur 2
... ... Fin Si
... Sinon Si pos=1,
... ... Si tirage<1/2,
... ... ... a prend la valeur 0
... ... Sinon,
... ... ... a prend la valeur 2
... ... Fin Si
... Sinon si pos=2
... ... a prend la valeur 2
... Fin Si
... pos prend la valeur a
Fin Pour
Afficher pos
```

## > Solution n°11 (exercice p. 20)

```
n prend une valeur donnée par l'utilisateur
A prend la valeur 0
B prend la valeur 0
C prend la valeur 0
Pour m allant de 1 à 1000,
... pos prend la valeur 0
... Pour i allant de 1 à n,
... ... tirage prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
... ... Si pos=0,
... ... ... Si tirage < 1/3,
... ... ... ... a prend la valeur 1
... ... ... Sinon,
... ... ... ... a prend la valeur 2
... ... ... Fin Si
... ... Sinon Si pos=1,
... ... ... Si tirage<1/2,
... ... ... ... a prend la valeur 0
... ... ... Sinon,
... ... ... ... a prend la valeur 2
... ... ... Fin Si
... ... Sinon si pos=2
... ... ... a prend la valeur 2
... ... Fin Si
... ... pos prend la valeur a
... Fin Pour i
... Si pos=0, Alors A prend la valeur A+1
... Sinon Si pos=1, Alors B prend la valeur B+1
... Sinon Si  pos=2, Alors C prend la valeur C+1
Fin Pour m
Afficher A/1000
```

```
Afficher B/1000
Afficher C/1000
```

## > Solution n°12 *(exercice p. 20)*

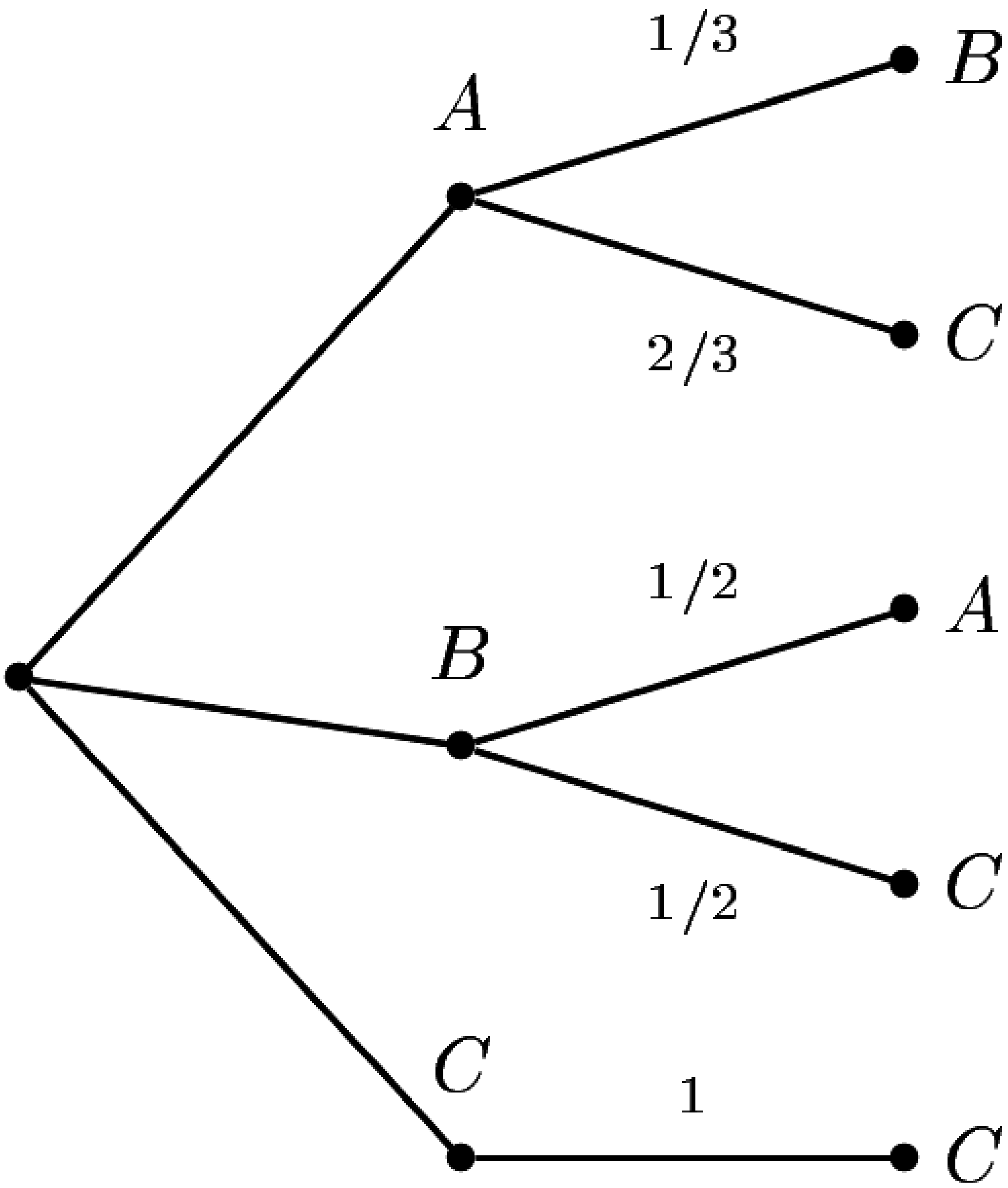
Voici le listing du programme en python

```
from random import random
n=4
A,B,C=0,0,0
for m in range(1000):
... pos=0
... for i in range(n):
... ... tirage=random()
... ... if pos==0:
... ... ... if tirage<1/3:
... ... ... ... a=1
... ... ... else:
... ... ... ... a=2
... ... elif pos==1:
... ... ... if tirage <1/2:
... ... ... ... a=0
... ... ... else:
... ... ... ... a=2
... ... elif pos==2:
... ... ... ... a=2
... ... pos=a
... if pos==0:
... ... A=A+1
... elif pos==1:
... ... B=B+1
... elif pos==2:
... ... C=C+1
print (A/1000)
print (B/1000)
print (C/1000)
```

On obtient une fréquence

- pour A de 0,033
- pour B de 0
- pour C de 0,967

## > Solution n°13 (exercice p. 21)




Pour k =1, on vient de A. Donc

- $a_1 = 0$
- $b_1 = \frac{1}{3}$
- $c_1 = \frac{2}{3}$

On vérifie que $a_1 + b_1 + c_1 = 1$

Pour k=2, on vient de B ou de C. On a donc

- $a_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{6}$

- $b_2 = 0$
- $c_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{5}{6}$

On vérifie que $a_2 + b_2 + c_2 = 1$

Pour k=3, on vient de A ou de C. On a donc

- $a_2 = 0$
- $b_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$
- $c_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times 1 = \frac{17}{18}$

On vérifie que $a_3 + b_3 + c_3 = 1$

## > Solution n°14 *(exercice p. 21)*

Si la puce est sur la case A, au rang suivant elle sera sur B ou C. Deux rang plus tard, elle sera sur A ou C.

Pour qu'elle se retrouve sur A à nouveau deux étapes plus tard, il faut qu'elle aille sur B puis sur A. Il faut donc faire le produit des probabilités soit $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ soit $\frac{1}{6}$ de la probabilité de départ.

Si la puce n'est pas en A, deux rangs plus tard, elle ne peut pas non plus être en A, donc la probabilité reste nulle.

Donc $a_{n+2} = \frac{1}{6} a_n$

## > Solution n°15 *(exercice p. 21)*

On procède au même raisonnement que précédemment. Pour aller de B à B en deux étapes, elle devra nécessairement passer par A puis par B. Le premier chemin de B vers A a une probabilité de $\frac{1}{2}$ et le second de A vers B de $\frac{1}{3}$. Au final, la probabilité du chemin B->A->B est $\frac{1}{6}$

## > Solution n°16 *(exercice p. 21)*

Si on exclue la case C qui laisse la puce sur place, la puce partant de A ne peut revenir vers A que tous les 2 tours. De même partant de B, elle ne peut revenir vers B que tous les deux tours.

La case de départ étant A, tous les tours impairs, on est sur que la puce n'est pas en A donc $a_{2n+1} = 0$

On a vu que $b_1 = \frac{1}{3}$ et donc à tous les tours pairs, il est impossible que la puce soit en B. donc $b_{2n} = 0$

Enfin, à chaque fois que p augmente de 1, donc tous les deux tours, la probabilité de la case A ou B est multipliée par \frac{1}{6} d'après la question précédente.

On en déduit donc les égalités demandées.

## > Solution n°17 (exercice p. 21)

La puce se trouve sur A, sur B ou sur C, il n'y a pas d'autre possibilité. De plus, les événements $A_n$, $B_n$ et $C_n$ sont disjoints donc la somme de leur probabilités vaut 1.

## > Solution n°18 (exercice p. 21)

On sait que la *limite d'une suite géométrique* - p.37 de raison $\frac{1}{6}$ est nulle.

Donc $\lim_{n \to +\infty} a_{2n} = 0$

De plus $\lim_{n \to +\infty} a_{2n+1} = 0$ car la suite $a_{2n+1}$ est constamment égale à 0

On en déduit que la suite $(a_n)$ tend vers 0.

On procède de même pour la suite $(b_n)$

On sait que $a_n + b_n + c_n = 1$ donc d'après les *opérations sur les limites* - p.38 $\lim_{n \to +\infty} a_n + b_n + \lim_{n \to +\infty} c_n = 1$. Or la première limite est nulle car chacune des suites tend vers 0 donc $\lim_{n \to +\infty} c_n = 1$

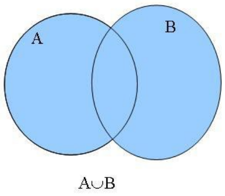
## > Solution n°19 (exercice p. 21)

Oui, déjà pour n=4 on obtenait une fréquence pour B de 0, une pour A proche de 0 et pour C, proche de 1.

# Contenus annexes

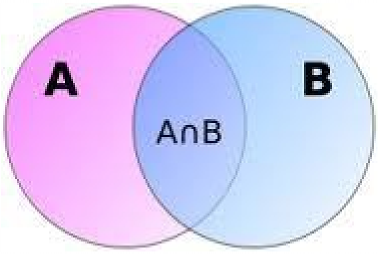
## - Réunion et intersection d'événements

### *Définition : Réunion d'événements*



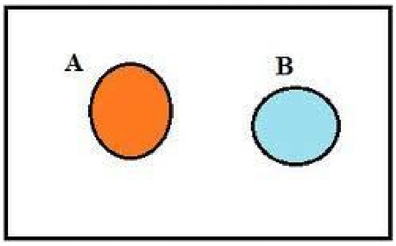

La réunion des événements A et B est l'événement $A \cup B$ formé de toutes les éventualités appartenant à A **ou** à B. (il s'agit du ou *inclusif*, les éventualités peuvent appartenir aux deux événements en même temps).

### *Définition : Intersection d'événements*




L'intersection des événements A et B est l'événement $A \cap B$ formé de toutes les éventualités appartenant à la fois à A et à B.

### *Complément : événements incompatibles*




Lorsque $A \cap B = \emptyset$, A et B n'ont aucune éventualité commune, on dit que ce sont des événements *disjoints* ou *incompatibles*.

### *Fondamental : Probabilité d'une union d'événement*

Si A et B sont deux événements quelconques, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si A et B sont deux événements disjoints, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

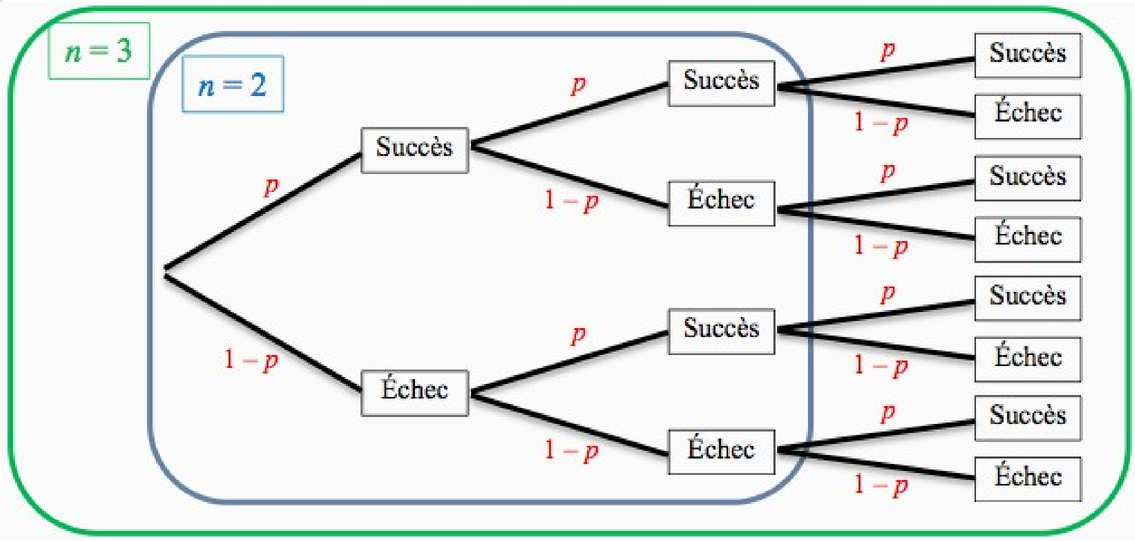
## - Schéma de Bernoulli

### *Définition : Schéma de Bernoulli*

Un schéma de Bernoulli est la répétition d'une **même épreuve de Bernoulli** dans des conditions d'**indépendance** (c'est à dire que l'issue d'une épreuve ne dépend pas des issues des épreuves précédentes).

### *Complément : Arbre associé à un schéma de Bernoulli*

Supposons que l'on répète n fois une même épreuve de Bernoulli de paramètre p dans des conditions d'indépendance, on peut alors associer à cette expérience l'arbre ci-dessous :




## - Loi binomiale

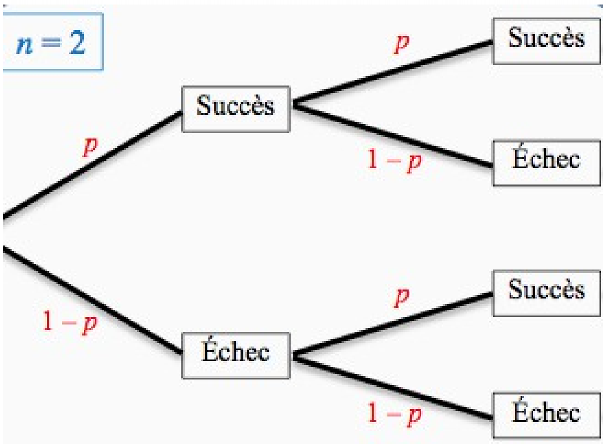
### *Définition : Loi binomiale*

On appelle *Loi binomiale de paramètres $n$ et $p$*, la loi de probabilité de la variable aléatoire qui associe au schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$ le nombre $k$ de succès.

| **Nb $k$ de succès** | $0$ | $1$ | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $P(X = 0)$ | $P(X = 1)$ | ... | $P(X = n)$ |

La *Loi binomiale de paramètres $n$ et $p$* est notée $B(n, p)$.

*Exemple : Loi binomiale B(2 ;p)*




- Pour 0 succès, il n'y a qu'un chemin :
  $P(X=0)=(1-p)\times(1-p)=(1-p)^2$.
- Pour 1 succès, il y a deux chemins :
  $P(X=1)=(1-p)\times p+p\times(1-p)=2p(1-p)$
- Pour 2 succès, il n'y a qu'un chemin :
  $P(X=2)=p\times p=p^2$

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $(1-p)^2$ | $2p(1-p)$ | $p^2$ |

On peut vérifier que
$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$
en développant le membre de gauche.

## - Limite d'une suite géométrique

*Fondamental : Propriété admise*

Soit $q$ un nombre strictement positif :

- Si $q>1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$
- Si $0<q<1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$

*Complément*

Si $(u_n)$ est une suite géométrique positive de raison q, alors

- Si $q>1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
- Si $0<q<1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

En effet, $u_n$ peut alors s'écrire $u_n=u_0\times q^n$. La multiplication de $q^n$ par la constante positive $u_0$ ne change pas le comportement de $q^n$ à l'infini, que celui-ci tende vers 0 ou l'infini.

*Exemple*

Cette propriété nous permet de conforter les conjectures que vous avons faites sur

les paragraphes précédents concernant les suites $(u_n)$ et $(v_n)$
$u_n = 5 \times 0,2^n$. La raison est **strictement comprise entre 0 et 1** donc la suite $(u_n)$ converge vers 0 ($\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$)
$v_n = 0,1 \times 1,2^n$. La raison est **strictement plus grande que 1** donc la suite $(v_n)$ diverge ($\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$)

## - Limite d'une somme

*Fondamental*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ | $\ell \in \mathbb{R}$ | $\ell \in \mathbb{R}$ | $\ell \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | /!\ /!\ /!\ _-_-_-_-_ |

*Attention : Attention à l'indétermination ! !*

La case ci-dessous désigne une indétermination donc une situation indécidable. Selon les cas, les limites pourront être finies ou infinies, ou ne pas exister.

Lorsque l'on tombe sur une indétermination, on doit utiliser d'autres moyens pour lever l'indétermination et répondre à la question posée.

**/!\ /!\ /!**
**_-_-_-_-_**

*Exemple*

$u_n = n$ et $v_n = n - 1$. $u_n - v_n$ est une indétermination du type $\infty - \infty$.

Dans cet exemple, la limite vaut 1 puisque $u_n - v_n = 1$

Prenons un autre exemple avec $u_n = (n+1)^2$ et $v_n = (n-1)^2$. $u_n - v_n$ est une indétermination du type $\infty - \infty$.
Dans cet exemple, $u_n - v_n = 4n$ donc la limite de $u_n - v_n$ vaut ici $+\infty$