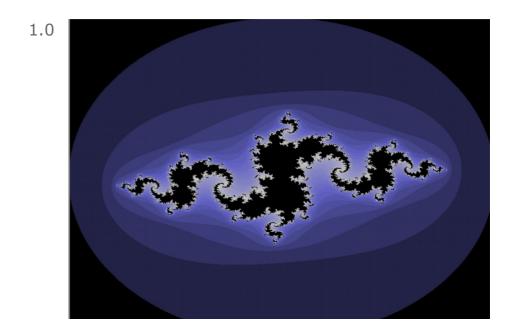
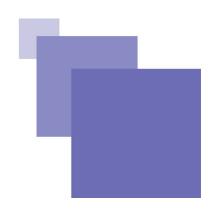
# Les nombres complexes - Partie I



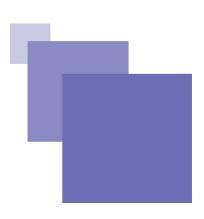
OLIVIER LÉCLUSE
CREATIVE COMMON BY-NC-SA



### **Table des matières**

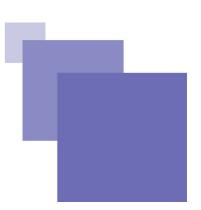
Objectifs	5
Introduction	7
I - Introduction aux nombres complexes	9
A. Résolution d'équations du troisième degré	9
B. Forme algébrique d'un nombre complexe	11
C. Égalité de deux complexes	13
D. Calculer avec les complexes	13
E. Représentation des nombres complexes	14
F. Inverse d'un nombre complexe	14
G. Conjugué d'un complexe	15
H. Calculer avec les complexes	15
II - Équations du second degré	17
A. Équation du second degré à coefficients réels	17
B. Résoudre une équation	18
III - Représentation géométrique	19
A. Affixe d'un point, d'un vecteur	19
B. Propriétés	20
C. Exercice	20
IV - Test final de la première partie	21
Solution des exercices	23
Contenus annexes	27





- Introduire les nombres complexes
- Forme algébrique, conjugué, somme, produit quotient de nombres complexes
- Équation du second degré à coefficients réels
- Représentation géométrique
- Affixe d'un point, d'un vecteur

### Introduction



Considérons l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ : L'équation x+3=4 possède une solution unique (x = 1) dans  $\mathbb{N}$ . Par contre une équation si simple que l'équation x + 4 = 3 ne possède pas de solutions dans  $\mathbb{N}$ .

Les mathématiciens ont donc inventé les **nombres négatifs** et construit l'ensemble  $\mathbb Z$  des entiers relatifs pour pallier à cette difficulté. L'équation x + 4 = 3 admet x = -1 comme solution. Les nombres négatifs sont nés.

Néanmoins, une équation aussi simple que 2x - 3 = 0 ne possède pas de solution dans  $\mathbb{Z}$ . Il faut donc inventer de nouveaux nombres, pour décrire les solutions de ce type d'équations

très simples. Dans  $\mathbb{Q}$ , l'équation 2x-3=0 admet comme solution x=1rationnels sont nés.

Même si les nombres rationnels permettent de décrire bon nombre de situations de la vie quotidienne, ils se trouvent vite limités. Un exemple tout simple permet d'en venir à bout : trouver la longueur de la diagonale d'un carré de coté 1 ! Le théorème de Pythagore nous permet d'énoncer cette problématique au moyen de l'équation simple  $x^2 = 2$ .

On peut démontrer par un raisonnement par l'absurde que cette équation n'admet pas de

solutions rationnelles : En effet, si une telle solution existait, on pourrait l'écrire

 $\frac{p^2}{q}=2$  donc  $p^2=2q^2$  ce qui montre que  $p^2$  est divisible par 2. Comme  $p^2$  est un carré, il est divisible par  $2^2$  donc **p est pair**. Mais alors  $\overline{2}$  est également pair puisque  $p^2$  est divisible par 4. Donc  $q^2$  est pair également. Donc

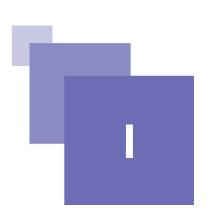
q est pair.

Mais le fait que p et q soient pair est en contradiction avec le fait que la fraction q est irréductible ! donc l'équation  $x^2 = 2$  n'a pas de solutions rationnelles.

On construit donc les nombres réels  $\mathbb R$  qui contient en particulier ce nouveau nombre  $\sqrt{2}$ que nous venons de créer.

En a t-on pour autant fini avec la découverte des nombres ?  $\mathbb{R}$  contient les nombres entiers, les négatifs, les rationnels, les irrationnels, des nombres bien mystérieux comme  $\pi$  ou e. Néanmoins, des équations très simples comme  $x^2 + 1 = 0$  n'ont toujours pas de solutions dans cet ensemble des nombres réels qu'on croit si complet. Nous allons donc dans ce chapitre résoudre cette équation en inventant un nouveau nombre imaginaire et construire ainsi un nouvel ensemble de nombres : l'ensemble des nombres complexes : C.





Résolution d'équations du troisième degré	9
Forme algébrique d'un nombre complexe	11
Égalité de deux complexes	13
Calculer avec les complexes	13
Représentation des nombres complexes	14
Inverse d'un nombre complexe	14
Conjugué d'un complexe	15
Calculer avec les complexes	15

Pourquoi inventer de nouveaux nombres ? Pourquoi vouloir écrire les solutions de l'équation  $x^2+1=0$  ? Cette question s'est posée à la fin du XVIè sciècle lorsque des mathématiciens ont cherché à résoudre les équations du 3ème degré. Nous allons le voir dans l'activité ci-dessous.

Avant de découvrir cette approche par le calcul, vous pourrez visionner ce film expliquant sous un angle géométrique la notion de nombres complexes.

### A. Résolution d'équations du troisième degré

Au début du XVIè siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro propose une formule donnant une solution de l'équation du degré  $3: x^3 + px = q: x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$ 

### Ouestion 1

[Solution n°1 p 21]

Donner à l'aide de cette formule une solution de l'équation  $x^3 - 18x - 35 = 0$  *Indice :* 

On pourra écrire l'équation sous la forme  $x^3 - 18x = 35$ 

A la fin du XVIè siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à

l'équation  $x^3 - 15x = 4$ . Nous allons voir que cela peut s'avérer problématique...

### Question 2

[Solution n°2 p 21]

En essayant d'appliquer la même formule sur l'équation de Bombelli, que se passe t-il ?

Dans le cas du second degré, lorsque le discriminent était négatif, on en concluait à la non existence de solutions réelles, ne pouvant prendre la racine carrée d'un nombre  $\Delta<0$ 

### Question 3

[Solution n°3 p 21]

Peut-on conclure de ce résultat que l'équation de Bombelli n'a pas de solutions réelles ?

### Indices:

On pourra penser au théorème des valeurs intermédiaires Calculer les limites en l'infini de la fonction  $x \mapsto x^3 - 15x - 4$ 

Bombelli a alors eu cette incroyable audace à l'époque d'écrire que  $\sqrt{-484}=22\sqrt{-1}$  , partant du constant que  $\sqrt{484}=22$ 

Il remarque alors que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

• 
$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

### Question 4

[Solution n°4 p 21]

En utilisant les égalités remarquables suivantes :

• 
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

• 
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

vérifier les calculs de Bombelli.

### Question 5

[Solution n°5 p 22]

En faisant preuve de la même audace que Bombelli, poursuivre les calculs afin de trouver une solution à l'équation de Bombelli.

Ainsi donc, en passant par ce nombre  $\sqrt{-1}$  qui n'est pas réel, la formule permet d'obtenir la solution x=4 qui elle est bien réelle. Ainsi, l'utilisation du nombre imaginaire  $\sqrt{-1}$  s'est révélée pertinente.

Les nombres complexes  $\mathbb C$  sont nés ! Néanmoins l'écriture  $\sqrt{-1}$  utilisée pendant 200 ans est problématique comme nous allons le voir :

### Question 6

[Solution n°6 p 22]

En remarquant que  $1 = (-1) \times (-1)$ , calculer de deux manières  $(\sqrt{-1})^2$ .

En déduire que l'écriture  $\sqrt{-1}$  n'est pas correcte.

### Indice:

On se rappellera la propriété de multiplication des racines carrées =  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 

C'est en 1777 que Leonhard Euler propose de remplacer l'écriture de  $\sqrt{-1}$  par la

lettre *i* comme *imaginaire*. L'écriture moderne  $i^2 = -1$  était née.

### B. Forme algébrique d'un nombre complexe



### Fondamental : Théorème (admis)

Il existe un ensemble de nombres, noté  $\mathbb C$ , qui contient l'ensemble des nombres réels et qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$  contient un nombre noté i vérifiant  $i^2 = -1$
- tous les éléments  $z \in \mathbb{C}$  s'écrivent de **manière unique** sous la forme z = a + ib où a et b sont des nombres réels
- C est muni de l'addition et de la multiplication qui possèdent les mêmes propriétés que l'ensemble des nombres réels.



### Définition

- Cet ensemble  $\mathbb C$  est appelé l'ensemble des nombres complexes
- L'écriture de ses éléments z sous la forme z = a + ib est appelée l'écriture algébrique du nombre complexe z.
  - Le nombre a s'appelle la partie réelle de z
  - Le nombre b s'appelle la partie imaginaire de z
  - On notera  $a = \operatorname{Re} z$  et  $b = \operatorname{Im} z$



### Exemple

Le nombre complexe z=3-2i a pour partie réelle  $\operatorname{Re} z=3$  et pour partie imaginaire  $\operatorname{Im} z=-2$ 



### Attention

La partie imaginaire d'un nombre complexe est donc un nombre bien réel!!

### C. Égalité de deux complexes



### Fondamental : Unicité de l'écriture algébrique

Soient a+ib et  $a^\prime+ib^\prime$  deux nombres complexes écrits sous leur forme algébrique. Alors

$$a + ib = a' + ib' \iff a = a' \text{ et } b = b'$$



### Complément : Démonstration

Par différence, il suffit de montrer que  $a + ib = 0 \iff a = 0$  et b = 0

Si a = 0 et b = 0, il est clair que a + ib = 0

Supposons à présent que a + ib = 0 et montrons que a = 0 et b = 0

Par l'absurde, supposons que  $b \neq 0$ , alors on pourrait écrire  $i = -\overline{b}$  ce qui ferait de i un nombre réel, absurde. Donc b = 0

De plus, 
$$a = -ib = -i \times 0 = 0$$

Donc a = b = 0

### D. Calculer avec les complexes

Soit z = 2 - 3i et z' = 1 + i

Question 1

[Solution n°7 p 22]

Calculer z + z'

Question 2

[Solution n°8 p 22]

Calculer  $z \times z'$ 

Question 3

[Solution n°9 p 22]

Vérifier les calculs ci-dessus à la calculatrice

Indice:

Sur TI, i est accessible depuis les touches 2nde et  $\odot$ 

Sur Casio, i est accessible depuis les touches SHIFT et 0

### E. Représentation des nombres complexes

A ce stade, nous avons introduit ne nouveaux nombres mais tout cela est bien abstrait. Alors que les nombres réels sont bien familiers pour nous et que l'on peut aisément se les représenter géométriquement en s'aidant d'une droite graduée, les nombres complexes pour le moment sont bien obscurs.

Voici donc une vidéo de vulgarisation de ces nombres complexes qui aidera à bien appréhender ce que sont les nombres complexes. Vous allez le voir, ces nombres complexes ne le sont pas tant que cela!

Vous pouvez le visionner jusqu'à la 9ième minute. La suite sur module et arguments concerne ce que nous verrons plus tard dans ce chapitre.

Ce film est extrait des films «Dimensions» visibles dans leur version intégrale à l'adresse suivante:

http://www.dimensions-math.org/Dim fr.htm1

### F. Inverse d'un nombre complexe



### Fondamental

- Un complexe z = a + ib est nul si et seulement si a = 0 et b = 0
- Tout complexe z = a + ib non nul admet un inverse.

$$\frac{1}{a} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Celui-ci a pour écriture algébrique  $\frac{1}{z} - \frac{1}{a^2 + b^2}$ 



### Complément : Démonstration

Le premier point est simplement une conséquence directe de l'unicité de l'écriture

1 - http://www.dimensions-math.org/Dim\_fr.htm

algébrique d'un complexe.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}$$

Pour le second point,  $\frac{-}{z} = \frac{-}{a+ib}$ .

Une astuce assez courante consiste à multiplier numérateur et dénominateur par a - ib

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)}.$$

Or  $(a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$  ce qui donne le résultat.



### Remarque

On voit au passage que grâce aux complexes, on peut à présent factoriser dans  $\mathbb C$ les formes  $a^2 + b^2$ 

### G. Conjugué d'un complexe



### Définition: Complexe conjugué

On voit apparaître dans le calcul de l'inverse une astuce de calcul consistant à multiplier par a - ib.

Le complexe a-ib est appelé *conjugué* de z=a+ib et est noté  $\bar{z}$ 



### Exemple

Le conjugué de z = 2 - i est  $\bar{z} = 2 + i$ 

$$\frac{1}{7} = \frac{2+i}{5}$$

L'inverse de z = 2 - i est  $\overline{z}$ 

L'inverse de i est -i.

Le conjugué d'un complexe permet de caractériser les nombres réels et les nombres imaginaires purs (ceux dont la partie réelle est nulle) parmi les complexes:

Soit z un nombre complexe.

- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- z imaginaire pur  $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$
- $z = a + ib, z\bar{z} = a^2 + b^2$



### Fondamental : Propriétés du conjugué

Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$ , alors

$$\frac{\bar{z} = z}{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$



### Complément

Les démonstrations de ces propriétés sont laissées à faire en exercice.

### H. Calculer avec les complexes

Question 1

Résoudre dans  $\mathbb C$  l'équation  $(E_1):3z+1-i=7+3i$ 

[Solution n°10 p 23]

Question 2

[Solution n°11 p 23]

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_2): 2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ 

Indice:

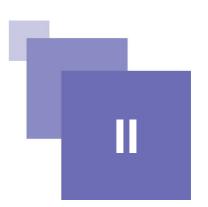
On pourra poser z = x + iy

Question 3

[Solution n°12 p 23]

On considère le nombre complexe z=a+2i avec  $a\in\mathbb{R}$  Déterminer a pour que  $z^2$  soit imaginaire pur





Équation du second degré à coefficients réels 17
Résoudre une équation 18

Vous avez vu en classe de première qu'une équation du second degré pouvait ne pas avoir de solutions dans le cas ou  $\Delta < 0$ . Maintenant que nous connaissons les nombres complexes, nous allons devoir repréciser cela.

### A. Équation du second degré à coefficients réels



### Fondamental

Soient a,b et c trois réels,  $a \neq 0$ . On s'intéresse aux solutions dans  $\mathbb C$  de l'équation  $az^2 + bz + c = 0$ 

Soit  $\Delta = b^2 - 4ac$ 

• Si 
$$\Delta > 0$$
, alors l'équation admet deux solutions réelles :  $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ 

Si  $\Delta = 0$ , alors l'équation admet une solution (double) réelle :  $\frac{\delta}{2a}$ 

• Si  $\Delta < 0$ , alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :  $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 



### Complément : Démonstration

On se rappelle qu'en classe de première, la mise sous forme canonique nous a permis d'écrire que

$$az^2 + bz + c = 0 \Longleftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Les cas  $\Delta>0$  et  $\Delta=0$  ont été traités en classe de première

Si  $\Delta < 0$  alors  $-\frac{\Delta}{4a^2}$  est un réel **positif** et on a

### Équations du second degré

$$az^2 + bz + c = 0 \Longleftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = i^2 \frac{-\Delta}{4a^2}$$

Cette équation, égalité de deux carrés, possède deux solutions selon que  $z+\frac{b}{2a}=i\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$  ou  $z+\frac{b}{2a}=-i\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$ 

Cela nous donne alors les deux solutions explicitées dans l'énoncé.

### B. Résoudre une équation

Question 1

[Solution n°13 p 24]

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + z + 1 = 0$ 

Question 2

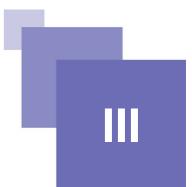
[Solution n°14 p 24]

Résoudre dans  $\mathbb C$  l'équation  $(E): \frac{3z-2}{z+1}=z$ 

Indice:

On pourra rechercher la valeur interdite à exclure





Affixe d'un point, d'un vecteur	19
Propriétés	20
Exercice	20

Vous avez l'habitude de représenter l'ensemble des réels x par une droite graduée. Pour les complexes, deux variables interviennent : x et y respectivement pour la partie réelle et la partie imaginaire. Pour représenter des nombres complexes, on utilisera donc une représentation dans le plan.

### A. Affixe d'un point, d'un vecteur

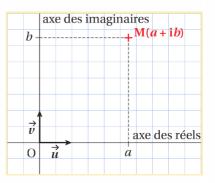
géométrique

Le plan est rapporté au repère orthonormé  $(O\;;\overrightarrow{u}\;;\overrightarrow{v}\;)$ 



### Définition: Image, affixe d'un point

- A tout nombre complexe  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  est associé le point M du plan de coordonnées (a;b) appelé *image* de z et noté
- A tout point M du plan de coordonnées (a;b) est associé le complexe  $z_M = a + ib$  appelé affixe du point M



Mais puisque les coordonnées d'un point M dans un repère sont aussi les coordonnées du vecteur OM, on peut également parler de l'image et de l'affixe d'un vecteur dans un repère



### Définition : Image, affixe d'un vecteur

A tout nombre complexe  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  est associé le vecteur  $\overrightarrow{w}$  du plan de coordonnées (a;b)

• A tout vecteur  $\overrightarrow{w}$  du plan de coordonnées (a;b) est associé le complexe z=a+ib appelé affixe du vecteur  $\overrightarrow{w}$ 

### **B. Propriétés**



### Fondamental

Pour tous points M et N d'affixes  $z_M$  et  $z_N$  du plan complexe,

• I'affixe du vecteur  $\overrightarrow{MN}$  est  $z_N - z_M$ 

$$z_M + z_N$$

- Le milieu K du segment [MN] a pour affixe  $\boxed{2}$
- Les points d'affixe ZM et -ZM sont symétriques par rapport à l'origine du repère
- Les points d'affixe  $z_M$  et  $\overline{z_M}$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (axe réel)



### Complément

On va donc pouvoir utiliser les nombres complexes en géométrie pour des calculs de coordonnées ou des transformations du plan.

### C. Exercice

On considère les points A et B d'affixes respectives  $z_A = 1 + 2i$  et  $z_B = 2 - i$ 

### Question 1

[Solution n°15 p 24]

Déterminer l'affixe du point C tel que OABC soit un parallélogramme en utilisant les affixes de vecteurs

### Indice:

OABC paralllélogramme si et seulement si  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ 

### Ouestion 2

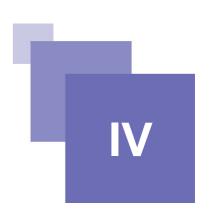
[Solution n°16 p 24]

Déterminer l'affixe du point C tel que OABC soit un parallélogramme en utilisant les affixes de milieux

### Indice:

OABC parallélogramme si et seulement si [OB] et [AC] ont même milieux

## Test final de la première partie



Pour ce test d'auto-évaluation final, vous devez obtenir un minimum de 80% de bonnes réponses. En cas d'échec, révisez la section du cours qui vous a posé des difficultés et retentez à nouveau le test.

_					- 4
$-\sim$	Or	$\sim$ 1		$\sim$	- 7
I X	— .			_	- 1
-	$\sim$	$\sim$	$\overline{}$	$\overline{}$	-

$$(-1+2i)^3 = \qquad \qquad i$$

### Exercice 2

L'inverse de  $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$  est égal à

- O son opposé
- on conjugué
- O l'opposé de son conjugué

### Exercice 3

$$2-5i$$

 $\overline{3+i}$  est égal à

$$\bigcirc \left| \frac{11}{8} - \frac{17}{8}i \right|$$

$$\frac{11}{10} - \frac{13}{10}i$$

$$\frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$$

### Exercice 4

$$-2z^{2} + 2z - \frac{17}{2} = 0$$
a deux solutions dans C qui sont

Test final de la première partie

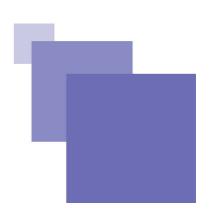
- $\bigcirc \frac{1}{2} + 2i \underbrace{\frac{1}{2} 2i}$
- $\frac{1+3\sqrt{2}}{2} \text{ et } \frac{1-3\sqrt{2}}{2}$

Exercice 5

Pour tout nombre complexe z,  $(z - i)(\bar{z} + i)$  est

- O un réel
- O un imaginaire pur
- O un nombre complexe ni réel ni imaginaire pur

# Solution des exercices



### > Solution n°1 (exercice p. 9)

Dans la formule, p = -18 et q = 35

$$q^2 + 4p^3/27 = 361 \text{ donc} \sqrt{q^2 + 4p^3/27} = 19$$

On a donc 
$$x = \sqrt[3]{\frac{35 - 19}{2}} + \sqrt[3]{\frac{35 + 19}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2 + 3 = 5$$

x = 5 est solution de l'équation  $x^3 - 18x - 35 = 0$  (on le vérifie aisément).

### > Solution n°2 (exercice p. 10)

Avec cette équation, nous avons p = -15 et q = 4.

Du coup 
$$q^2 + 4p^3/27 = -484$$

La formule ne s'applique pas car on ne peut calculer  $\sqrt{-484}$ !!

### > Solution n°3 (exercice p. 10)

On sait que la fonction  $f: x \longmapsto x^3 - 15x - 4$  est continue sur  $\mathbb R$  car c'est un polynôme. Le chapitre des limites nous permet d'écrire cette fonction sous la forme

$$x^3 \left(1 - \frac{15}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)$$

En l'infini, le contenu de la parenthèse tend vers 1. Donc on a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Le théorème des valeurs intermédiaires - p.25 nous permet donc de conclure à l'existence d'au moins une solution réelle.

### > Solution n°4 (exercice p. 10)

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 3 \times 4\sqrt{-1} + 3 \times 2 \times (-1) + (-1)\sqrt{-1}$$

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 + (-1)\sqrt{-1}$$

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 8 - 3 \times 4\sqrt{-1} + 3 \times 2 \times (-1) - (-1)\sqrt{-1}$$

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1}$$

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

### > Solution n°5 (exercice p. 10)

$$x = \sqrt[3]{\frac{4 - 22\sqrt{-1}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 + 22\sqrt{-1}}{2}} = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$
On a alors

En utilisant les calculs réalisés à la question précédente, on extrait aisément les racines cubiques:

$$x = (2 - \sqrt{-1}) + (2 + \sqrt{-1})$$
 donc  $x = 4$ 

On vérifie aisément que x = 4 est bien solution de l'équation  $x^3 - 15x = 4$ 

### > Solution n°6 (exercice p. 10)

Par définition de la racine carrée,  $(\sqrt{-1})^2 = -1$ 

Mais on a aussi 
$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

On obtient alors 1=-1 ce qui n'a pas de sens. Il faut donc absolument éviter d'utiliser l'écriture  $\sqrt{-1}$ 

### > Solution n°7 (exercice p. 12)

$$z + z' = 2 - 3i + 1 + i = 3 - 2i$$

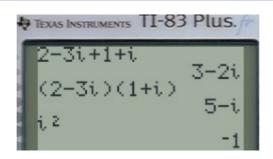
### > Solution n°8 (exercice p. 12)

 $z \times z' = (2-3i) \times (1+i)$ . Puisque les règles de calcul dans  $\mathbb C$  sont les mêmes que dans  $\mathbb{R}$ , On applique al double distributivité :

$$z \times z' = (2 - 3i) \times (1 + i) = 2 + 2i - 3i - 3i^2 = 2 + 2i - 3i + 3 = 5 - i$$

### > Solution n°9 (exercice p. 12)

### Sur TI



### Sur Casio



### > Solution n°10 (exercice p. 14)

$$(E_1) \Longleftrightarrow 3z = 7 + 3i - (1 - i)$$

$$(E_1) \iff 3z = 6 + 4i$$

$$(E_1) \Longleftrightarrow z = 2 + \frac{4}{3}i$$

L'équation admet donc comme unique solution  $z = 2 + \frac{4}{3}i$ 

### > Solution n°11 (exercice p. 14)

Soit z = x + iy la forme algébrique d'une solution de l'équation.

$$(E_2) \Longleftrightarrow 2x + 2iy + i(x - iy) = 5 - 2i$$

$$(E_2) \iff 2x + 2iy + ix + y = 5 - 2i$$

$$(E_2) \Longleftrightarrow 2x + y + i(2y + x) = 5 - 2i$$

L'unicité de l'écriture algébrique d'un complexe permet d'écrire le système d'équation suivant, par identification des parties réelles et imaginaires :

$$(E_2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ 2y + x = -2 \end{array} \right.$$

Remplaçons la première équation par la première moins deux fois la seconde :

Remplaçons la première
$$(E_2) \iff \begin{cases} -3y = 9 \\ 2y + x = -2 \end{cases}$$

$$(E_2) \iff \begin{cases} y = -3 \\ -6 + x = -2 \end{cases}$$

$$(E_2) \iff \begin{cases} y = -3 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$(E_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ -6 + x = -2 \end{cases}$$

$$(E_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Donc l'équation admet une solution unique : z = 4 - 3i

### > Solution n°12 (exercice p. 14)

$$(a + 2i)^2 = a^2 + 4ai + 4i^2 = (a^2 - 4) + 4ai$$

 $z^2$  est imaginaire pur si et seulement si  $a^2 - 4 = 0$ . Cette équation du second degré a trivialement deux solutions : a = 2 et a = -2.

### > Solution n°13 (exercice p. 16)

$$\Delta = 1^2 - 4 = -3$$

 $\Delta < 0$  donc il y a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$
 et  $z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ 

### > Solution n°14 (exercice p. 16)

Comme dans  $\mathbb{R}$ , la valeur de z qui annule le dénominateur est à exclure

$$z + 1 = 0 \iff z = -1$$
. On suppose dorénavant que  $z \neq -1$ 

En multipliant l'équation (E) par  $z+1\neq 0$ , on obtient (E'): 3z-2=z(z+1)l'équation

$$(E') \Longleftrightarrow z^2 + z - (3z - 2) = 0$$

$$(E') \iff z^2 - 2z + 2 = 0$$

 $\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2$ . Il y a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$
 et  $z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ 

ces deux solutions étant différences de la valeur interdite, on en déduit que ce sont également les solutions de l'équation (E) de départ.

$$S = \{1 - i ; 1 + i\}$$

### > Solution n°15 (exercice p. 18)

L'affixe de  $\overrightarrow{OA}$  est  $z_A - 0 = 1 + 2i$ 

Soit  $z_C = x + iy$  l'affixe de C. Alors  $z_B - z_C = 2 - i - x - iy = 2 - x + i(-1 - y)$  est l'affixe de  $\overrightarrow{CB}$ 

*OABC* paralllélogramme si et seulement si  $z_B - z_C = z_A$ 

Donc 
$$2 - x + i(-1 - y) = 1 + 2i$$

En identifiant parties réelles et imaginaires on a

• 
$$2 - x = 1 \text{ donc } x = 1$$

$$-1 - y = 2 \text{ donc } y = -3$$

Donc C(1; -3)

### > Solution n°16 (exercice p. 18)

$$\frac{z_B + 0}{2} = \frac{2 - i}{2}$$

Le milieu de [OB] a pour affixe  $\frac{z_B + 0}{2} = \frac{2 - i}{2}$ 

Soit  $z_C = x + iy$  l'affixe de C. Alors l'affixe du milieu de [AC] est  $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1 + 2i + x + iy}{2}$ 

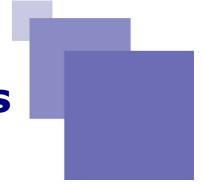
En identifiant parties réelles et imaginaires, les diagonales auront même milieux si et seulement si

• 
$$2 = 1 + x \text{ donc } x = 1$$

$$-1 = 2 + y_{donc} y = -3$$

Donc C(1; -3)

### **Contenus annexes**



### - Théorème des valeurs intermédiaires



Fondamental : Théorème des valeurs intermédiaires (TVI). Propriété admise.

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I. Soient a et b deux réels appartenant à cet intervalle.

Alors, pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c) = k

Autrement dit, l'équation f(x) = k admet au moins une solution c comprise entre a et b.

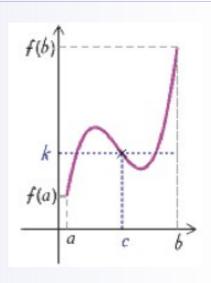


Image 1 TVI cas non monotone



### Complément : Cas où f est monotone

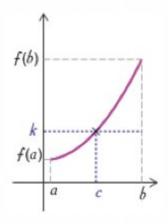


Image 2 TVI cas monotone

Si de plus la fonction f est **strictement monotone** sur l'intervalle I, alors le réel c est **unique**.



### Attention : La continuité est une hypothèse essentielle du théorème

Si la fonction f n'est pas continue, il est possible que pour un réel k compris entre f(a) et f(b), il n'existe aucune solution à l'équation f(x) = k ! !

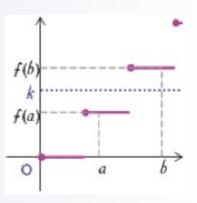


Image 3 Contre exemple