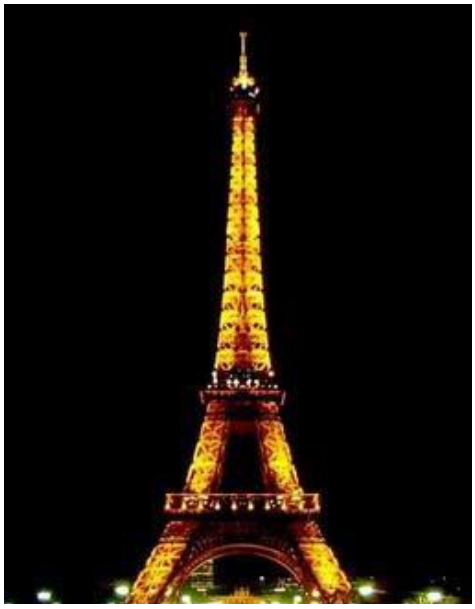
Terminale S

Fonction Exponentielle

1.0



Olivier Lécluse

Creative Common BY-NC-SA

Juillet 2013

Table des matières

Objectifs *5*

Introduction *7*

I - Introduction de la fonction exponentielle *9*

A. Construction d'une fonction telle que f'=f et f(0)=1 *9*

B. La fonction exponentielle *10*

C. ROC : Démonstration de l'unicité de la fonction exponentielle *12*

II - Relation fonctionnelle et notation e *13*

A. Relation fonctionnelle *13*

B. Notation e *13*

C. Exercice *15*

III - Étude de la fonction exponentielle *17*

A. Signe et sens de variation *17*

B. Résoudre une inéquation *19*

C. ROC : Limites en l'infini de la fonction exponentielle *19*

D. Variations de la fonction exponentielle *20*

E. Comparaison exp et x *21*

F. Encore une limite à connaître *22*

G. Courbe représentative *26*

IV - Exponentielle d'une fonction *29*

A. Dérivée de la fonction exp(u(x)) *29*

B. Exemples type *30*

V - Tester ses connaissances *33*

Solution des exercices *37*

Contenus annexes *47*

Objectifs

- Introduire la fonction exponentielle
- Étudier les propriétés de la fonction exponentielle
- Étudier la fonction exponentielle et ses limites.

Dans ce chapitre, in est important de bien connaître les notions de dérivation revues au chapitre précédent.

Introduction

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par une fonction qui est proportionnelle à sa dérivée. (Par exemple, le phénomène de désintégration de noyaux radioactifs).

Nous allons ici nous intéresser à l'une des fonctions de ce type.

Plus particulièrement, que peut-on dire d'une fonction qui serait égale à sa dérivée ?

Nous connaissons déjà au moins une fonction égale à sa dérivée : la fonction nulle ! Mais cette fonction est sans intérêt. Notre objectif est d'en rechercher d'autres.

Introduction de la fonction exponentielle

Construction d'une fonction telle que f'=f et f(0)=1	9
La fonction exponentielle	10
ROC : Démonstration de l'unicité de la fonction exponentielle	12

A. Construction d'une fonction telle que f'=f et f(0)=1

Dans cette activité, nous cherchons à construire de manière approchée la courbe représentative d'une fonction dérivable *f* vérifiant

- f'=f
- f(0)=1

Question 1

[*Solution n°1 p 27*]

Avec un pas de 1

Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse ? ?

Tracer le segment porté par cette tangente pour x variant de 0 à 1

Si on assimile la courbe à sa tangente, quelle approximation peut-on donner de f(1) ?

Question 2

[*Solution n°2 p 27*]

Avec un pas de 0,5

Avec la méthode utilisée précédemment, mais avec un pas de 0,5, quelle approximation de f(0,5) obtient-on ?

Qu'en déduit-on pour f'(0,5) ? A l'aide d'un nouveau segment ayant cette approximation comme coefficient directeur, donner une nouvelle approximation de f(1)

Question 3

[*Solution n°3 p 28*]

Reproduire la construction précédente avec un pas de 0,2

Bilan de l'activité

On voit ainsi qu'il semble possible de proche en proche de construire une telle fonction vérifiant les deux contraintes données au départ. Plus on affine le pas, plus la courbe devient lisse et se dresse peu à peu.

L'animation ci-dessous permet de montrer les 3 constructions que nous avons réalisé, et d'y superposer la courbe finale de notre *fonction mystère* que nous appellerons *exp*

Question 4

[*Solution n°4 p 31*]

Pour aller plus loin ...

Imaginer un algorithme s'inspirant de la méthode de construction réalisée ci dessus permettant pour un pas donné de donner une valeur approchée de f(1).

B. La fonction exponentielle

Fondamental : Existence et unicité de la fonction exponentielle

Il existe une unique fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f' = f$
- $f(0) = 1$

Cette fonction est appelée *fonction exponentielle* et est notée *exp*

Complément

La démonstration de l'existence d'une telle fonction est admise. Néanmoins l'activité précédente nous permet de conjecturer l'existence d'une telle fonction en nous permettant de la construire pas à pas

L'unicité d'une telle fonction fait l'objet d'une ROC :)

C. ROC : Démonstration de l'unicité de la fonction exponentielle

Résultat préliminaire

Si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors pour tout réel *x*, on a $f(x) \times f(-x) = 1$

Par conséquent, une telle fonction **ne s'annule jamais**. La fonction *exp* que nous avons définie **ne s'annule donc jamais**.

Question 1

[*Solution n°5 p 31*]

ROC : Démontrer ce résultat

Unicité de la fonction exponentielle

La fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f' = f$
- $f(0) = 1$

est unique

Question 2

[*Solution n°6 p 31*]

ROC : Démontrer ce résultat

II

Relation fonctionnelle et notation e

Relation fonctionnelle	13
Notation e	13
Exercice	15

L'exponentielle possède une propriété remarquable : celle de transformer les sommes en produit.

A. Relation fonctionnelle

Nous allons démontrer la propriété fondamentale de la fonction exponentielle.

Question 1

[*Solution n°7 p 31*]

Soit y un réel quelconque fixé au hasard.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp x}$

Montrer que f(x) est constante et donner sa valeur.

Question 2

[*Solution n°8 p 31*]

En déduire la relation fonctionnelle de l'exponentielle : $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

B. Notation e

La relation fonctionnelle $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ n'est pas sans rappeler les propriétés sur les puissances : nous savons en effet depuis le collège que pour tout nombre a : $a^{n+m} = a^m \times a^n$

L'idée est donc de **noter l'exponentielle comme une puissance** en définissant un nouveau nombre fondamental en mathématique servant de base pour cette notation.

Définition : Le nombre d'Euler : le nombre e

On définit le nombre $e = \exp(1)$.

On a alors $\exp 2 = \exp(1+1) = \exp 1 \times \exp 1 = e \times e = e^2$

$\exp 3 = \exp(2+1) = \exp 2 \times \exp 1 = e^2 \times e = e^3$

et en généralisant cette écriture $\exp x = e^x$

C'est la *notation puissance* de l'exponentielle

Le nombre *e* s'appelle le *nombre d'Euler*. Nous en avons déterminé une valeur approchée au moyen de l'*algorithme*[1] de la seconde activité de ce chapitre. Il faut retenir que $e \approx 2,71828$

On a bien sûr $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

1 - http://www.pythontutor.com/visualize.html#code=P%3D0.02%0AF%3D1%0AX%3D0%0A%0Awhile+X%3C1%3A%0A++++Fprime%3DF%0A++++X%3DX%2BP%0A++++F%3DF%2BFprime*P%0A%0Aprint(F)+&mode=display&cumulative=false&heapPrimitives=false&drawParentPointers=false&textReferences=false&showOnlyOutputs=false&py=3&curInstr=0

Fondamental : Relation fonctionnelle et conséquences immédiates

Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif n, on a les relations suivantes

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$

Complément : Démonstration

Nous avons démontré la relation fonctionnelle donnant la première égalité

$e^{-x} \times e^x = e^{-x+x} = e^0 = 1$ d'où découle la seconde égalité

$e^{x-y} = e^x \times e^{-y}$ d'où découle la troisième égalité

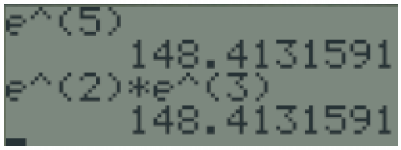
Démontrons la dernière égalité par récurrence :

Supposons que n est un entier naturel

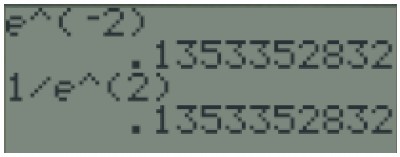
1. `Initialisation` :
   pour $n = 0, e^{0x} = (e^x)^0 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$
2. `Hérédité` :
   Posons $\mathcal{P}_n$: $e^{nx} = (e^x)^n$ pour tout *x* réel
   Supposons que pour un certain *k* $\mathcal{P}_k$ soit **vraie**
   $e^{(k+1)x} = e^{kx+x} = e^{kx} \times e^x$
   D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_k$: $e^{kx} = (e^x)^k$
   Donc $e^{(k+1)x} = (e^x)^k \times e^x = (e^x)^{k+1}$
   Ce qui montre que $\mathcal{P}_{k+1}$ est **vraie**. l'hypothèse de récurrence est donc héréditaire.
3. `Conclusion` :
   Le théorème de récurrence nous permet donc d'affirmer que pour tout entier naturel $e^{nx} = (e^x)^n$

Si n est un entier relatif négatif, alors -n est un entier naturel et la démonstration ci-dessus s'applique en posant y=-x.

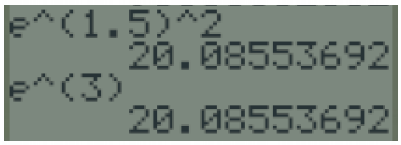
Exemple : A la calculatrice



$e^5 = e^2 \times e^3$



$e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$



$(e^{1,5})^2 = e^3$

C. Exercice

Simplifier au maximum les écritures suivantes

Question 1

[Solution n°9 p 32]

$A = \dfrac{e^{2x}}{e^{3x}}$

Question 2

[Solution n°10 p 32]

$B = e^x(1 + 2e^{-x})$

Question 3

[Solution n°11 p 32]

$C = \dfrac{e^{x+2}}{e^{x+1}}$

Question 4

[Solution n°12 p 32]

$D = (e^x + e^{-x})^2$

Question 5

[Solution n°13 p 32]

$E = \dfrac{e^{2x-1}}{e^{2x}}$

Question 6

[Solution n°14 p 32]

$F = \dfrac{e^{3x} + e^x}{e^{2x} + 1}$

Étude de la fonction exponentielle

III

Signe et sens de variation	17
Résoudre une inéquation	19
ROC : Limites en l'infini de la fonction exponentielle	19
Variations de la fonction exponentielle	20
Comparaison exp et x	21
Encore une limite à connaître	22
Courbe représentative	26

A. Signe et sens de variation

Fondamental : Une exponentielle est toujours positive

Pour tout réel $x, e^x > 0$

Complément

En effet, toute exponentielle s'écrit comme un carré : $e^x = (e^{x/2})^2$. A ce titre e^x est donc toujours positif.

Fondamental : L'exponentielle est croissante

la dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle elle-même.
Or celle-ci est toujours positive.
Par conséquent l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Complément : L'exponentielle conserve les inégalités

On en déduit que pour tous réels *x* et *y*

- $x < y \iff e^x < e^y$
- $x = y \iff e^x = e^y$

Remarque

Ces propriétés d'allure anodines sont très commodes pour résoudre des équations ou des inéquations faisant intervenir des exponentielles :

Exemple

Résoudre $(e^x)^2 = e^{x^2}$

Commençons par écrire le membre de gauche sous forme d'une exponentielle :

$e^{2x} = e^{x^2}$

A présent, l'exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on en déduit que cette égalité a lieu si et seulement si les expressions à l'intérieur des fonctions exponentielles sont égales (les mauvaises langues diront qu'on a simplifié par e ! !)`

$2x = x^2$.

Pour résoudre cette équation du second degré, on ne simplifie surtout pas par x ! ! on met x en facteur

$x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0$

Ce qui nous donne **deux solutions** : $x = 0$ et $x = 2$

B. Résoudre une inéquation

Question

[Solution n°15 p 32]

Résoudre l'inéquation :

$e^{x^2-3x-4} > 1$

Indices :

La fonction exp est strictement croissante donc elle conserve le sens des inégalités.

1 peut s'écrire e^0.

C. ROC : Limites en l'infini de la fonction exponentielle

Limites à connaître

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Question

[Solution n°16 p 32]

ROC : Démontrer ces résultats

D. Variations de la fonction exponentielle

Fondamental : Tableau de variations de la fonction exponentielle

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp' x$		$+$	1	$+$	
$\exp x$	0	↗	1	↗	$+\infty$

Exemple

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1-e^{-x}}$

Quand x tend vers $-\infty$, -x tend vers $+\infty$ donc e^{-x} tend vers $+\infty$

On se remémore les *règles de calcul sur les limites* - p.35.

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-e^{-x} = -\infty$

donc par la règle de l'inverse d'une limite : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1-e^{-x}} = 0$

E. Comparaison exp et x

Nous allons voir qu'en l'infini, l'**exponentielle l'emporte sur x**. Ce résultat sera à connaître

Question 1

[*Solution n°17 p 33*]

On considère la fonction $f : x \longmapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$ définie sur $[0\,;+\infty[$

Calculer *f'* puis en déduire les variations de f

Question 2

[*Solution n°18 p 33*]

En déduire que pour tout x positif, $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$

Indice :

On pourra montrer que $e^x > \dfrac{x^2}{2}$

Question 3

[*Solution n°19 p 33*]

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Question 4

[Solution n°20 p 33]

Montrer que $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Indices :

On pourra poser X=-x

Si x tend vers $-\infty$, X tend vers ...

Pour retenir ces limites, on se dit que l'exponentielle l'emporte sur x :

- En $+\infty$, elle l'emporte sur x et le quotient va à l'infini
- En $-\infty$, elle écrase le x vers 0

Ces limites permettent de lever des cas d'indétermination : $\frac{\infty}{\infty}$ pour la première et $0\times\infty$ pour la seconde.
A ce titre il est important de les mémoriser.

F. Encore une limite à connaître

Fondamental

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Remarque

Il s'agit la encore d'une indétermination du type $\frac{0}{0}$. Pour la lever, on va utiliser ... les dérivées !

Méthode : On utilise la définition du nombre dérivé en 0

On se rappelle la *définition du nombre dérivé d'une fonction en un point* - p.36.

Sachant que $1=e^0$, $\frac{e^x-e^0}{1-0}$ est le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0

Puisque l'exponentielle est dérivable en 0, ce taux d'accroissement tend vers une limite qui est le nombre dérivé $\exp'(0)=1$

CQFD

G. Courbe représentative

Tableau de variation de la fonction exp

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		+	
$f(x)$	0	↗	1	↗	e	↗	$+\infty$

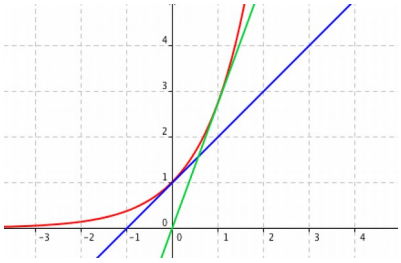
La fonction *exp* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Équation de la tangente en 0 à exp

On se rappelle de la *formule* - p.37 permettant de calculer l'équation de la tangente à une fonction en un point.

Par conséquent, la tangente T_0 en 0 à la fonction *exp* est $y = e^0(x-0)+1$ donc $y = x+1$.

De même, l'équation de la tangente T_1 en 1 à la fonction exp est $y = e^1(x-1)+e$ donc $y = ex$ (à ne pas confondre avec e^x !)



Fondamental : Position de la courbe de la fonction exponentielle par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

La courbe de la fonction exponentielle est au dessus de la tangente au point d'abscisse 0. Le seul point de contact est le point de coordonnées (0 ;1).

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - (x-1)$ est toujours positive :

Il suffit de l'étudier pour s'en convaincre :

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 1$.

Pour connaître le signe de $e^x - 1$, résolvons l'inéquation $e^{-}1 > 0$:

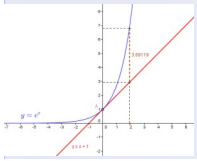
$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

On peut ensuite établir un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)=e^x-1$		$-$	0	$+$	
$g(x)=e^x-(x-1)$		↘	0	↗	

Ainsi, la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$ et de même, $e^x \geq x+1$.

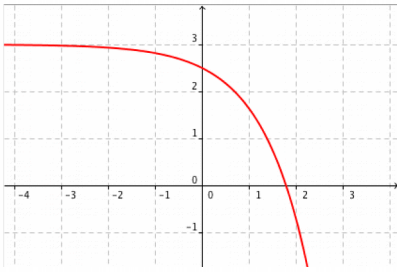
Donc la courbe de la fonction exponentielle est au dessus de la tangente.



Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 0,5e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -0,5e^x$.

Comme pour tout réel x, e^x est **strictement positif**, on en déduit que $f'(x)$ est **strictement négative** sur $\mathbb{R}$ donc f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.



Exponentielle d'une fonction

IV

Dérivée de la fonction exp(u(x)) 29
Exemples type 30

A. Dérivée de la fonction exp(u(x))

Fondamental : Propriété (admise)

Si *u* est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $exp'(u(x)) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Exemple

Soit *f* la fonction $f : x \longmapsto e^{-2x}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2e^{-2x}$.

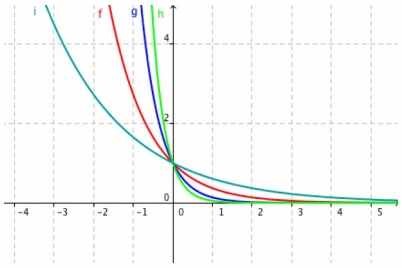
Soit *g* la fonction $g : x \longmapsto e^{-x^2}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -2xe^{-x^2}$.

B. Exemples type

Exemple : fonctions de type exp(-kx) avec k>0

Soit *k* un réel strictement positif et $f(x) = e^{-kx}$



- $f(x) = e^{-x}$
- $g(x) = e^{-2x}$
- $h(x) = e^{-3x}$
- $i(x) = e^{-x/2}$

Alors $f'(x) = -k.e^{-kx}$. L'exponentielle étant toujours positive et *k* positif, $f'(x)$ est strictement négative pour tout réel *x*. La fonction *f* est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

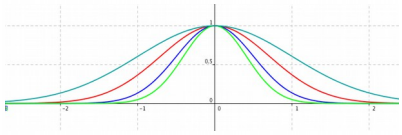
De plus pour $x = 0$, $f(x) = 1$ quelque soit la valeur de *k*. On obtient donc les courbes pour différentes valeurs de *k* :

Exemple : fonctions de type exp(-kx^2) avec k>0

Soit *k* un réel strictement positif et $g(x) = e^{-kx^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2kx\ e^{-kx^2}$		$+$	0	$-$	
e^{-2kx^2}		↗	1	↘	

Alors $g'(x) = -2kxe^{-kx^2}$. L'exponentielle étant toujours positive et *k* positif, $g'(x)$ est du signe opposé à x pour tout réel x. La fonction *g* est donc strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$ et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.



De plus pour $x = 0$, $f(x) = 1$ quelque soit la valeur de *k*. On obtient donc les courbes pour différentes valeurs de *k* :

- $f(x) = e^{-x^2}$
- $g(x) = e^{-2x^2}$
- $h(x) = e^{-3x^2}$
- $i(x) = e^{-x^2/2}$

On remarque cette forme particulière en cloche qui n'est pas sans rappeler la loi binomiale étudiée l'an dernier. Nous approfondirons cette question dans le chapitre sur la loi normale.

Tester ses connaissances

V

Pour ce test d'auto-évaluation final, vous devez obtenir un minimum de 80% de bonnes réponses. En cas d'échec, révisez la section du cours qui vous a posé des difficultés et retentez à nouveau le test.

Exercice 1

L'expression $\dfrac{e^{x-1} \times e^{2x}}{(e^{x+1})^2}$ *est égale à :*

- ☐ $\dfrac{e^{x-1}}{e^2}$
- ☐ $e^{-3} \times e^{2x}$
- ☐ e^{x-3}
- ☐ $\dfrac{e^{3x-1}}{e^{x^2+1}}$

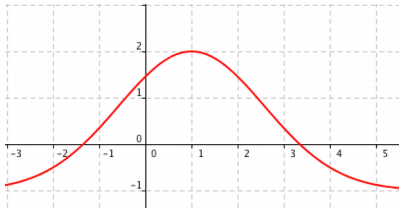
Exercice 2

La fonction $x \longmapsto 1 - e^x$ *est :*

- ☐ croissante sur $\mathbb{R}$.
- ☐ décroissante sur $\mathbb{R}$.
- ☐ positive sur $\mathbb{R}$.
- ☐ strictement positive sur]-∞ ; 0[

Exercice 3

La fonction u définie sur]-3 ;5] est représentée par la courbe ci-contre.
La fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est :



- ☐ croissante sur [-1 ;3].
- ☐ croissante sur [-3 ;1].
- ☐ positive sur [-1 ;3].
- ☐ positive sur [-3 ;5]

Exercice 4

On applique l'algorithme suivant :

Entrée : Demander un réel A supérieur ou égal à 1

Traitement :

- *M prend la valeur 0*
- *Tant que $e^M < A$ faire*
  - *M prend la valeur M+1*
- *Fin du Tant que*
- *Afficher M*

- ☐ Si on introduit A=3, alors l'algorithme retourne M=1 en sortie
- ☐ Si on introduit A=3, alors l'algorithme retourne M=2 en sortie
- ☐ Si on introduit $A = 2^{10}$ alors M est plus grand que 10 en sortie
- ☐ Si en sortie M=50, alors on a introduit un nombre réel $A > 2^{50}$

Exercice 5

Pour tout réel k, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - kx = +\infty$

- ○ Vrai
- ○ Faux

Exercice 6

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3x} = ...$

- ○ Pas de limite car forme indéterminée
- ○ $+\infty$
- ○ 0
- ○ $\frac{1}{3}$

Exercice 7

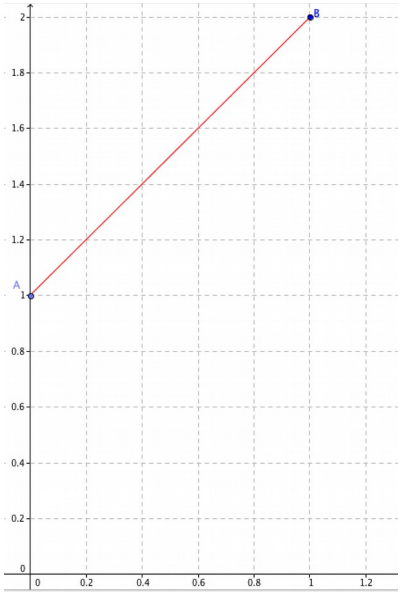
$e^{-x} > 1$ *si et seulement si...*

- ○ $x < -1$
- ○ x>0
- ○ x<0

Solution des exercices

> Solution n°1 *(exercice p. 9)*

f'(0) =f(0)=1 donc la pente de la tangente est 1.



Si on assimile la courbe à sa tangente sur [0 ;1], on obtient le tracé ci-contre.

On peut en déduire l'approximation $f(1) \approx 2$

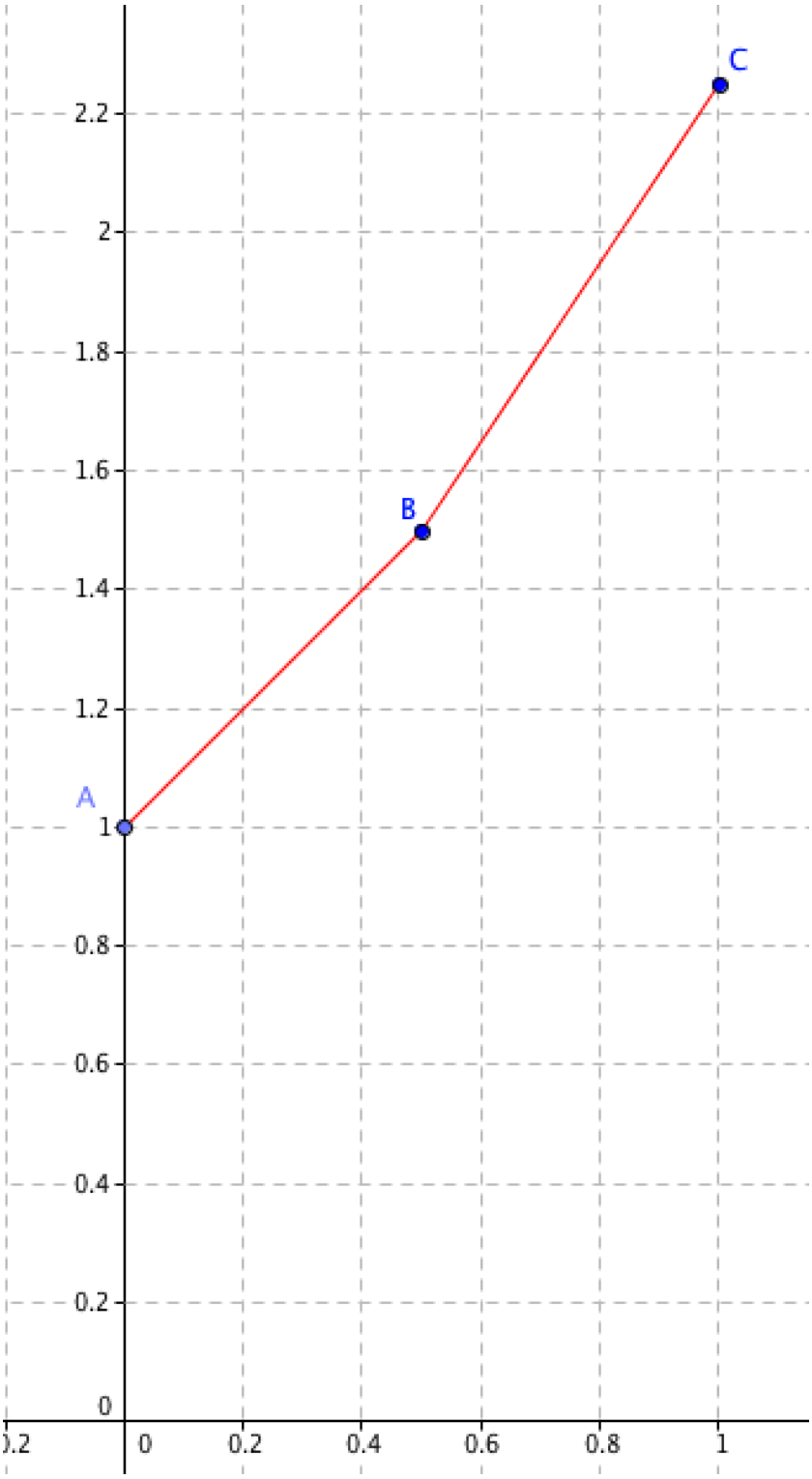
> Solution n°2 *(exercice p. 9)*

maintenant, f'(0,5)=f(0,5)=1,5.

La nouvelle tangente en 0,5 a donc pour pente 1,5.

L'équation de cette nouvelle tangente est $y = f'(0,5)(x - 0,5) + f(0,5) = 1,5(x - 0,5) + 1,5$

On en déduit que f(1) est le point d'abscisse 1 sur cette tangente a pour valeur approchée y=1,5(0,5)+1,5=2,25



> Solution n°3 *(exercice p. 9)*

On place les points A(0 ;1) et B(0,2 ; 1,2) pour démarrer la construction

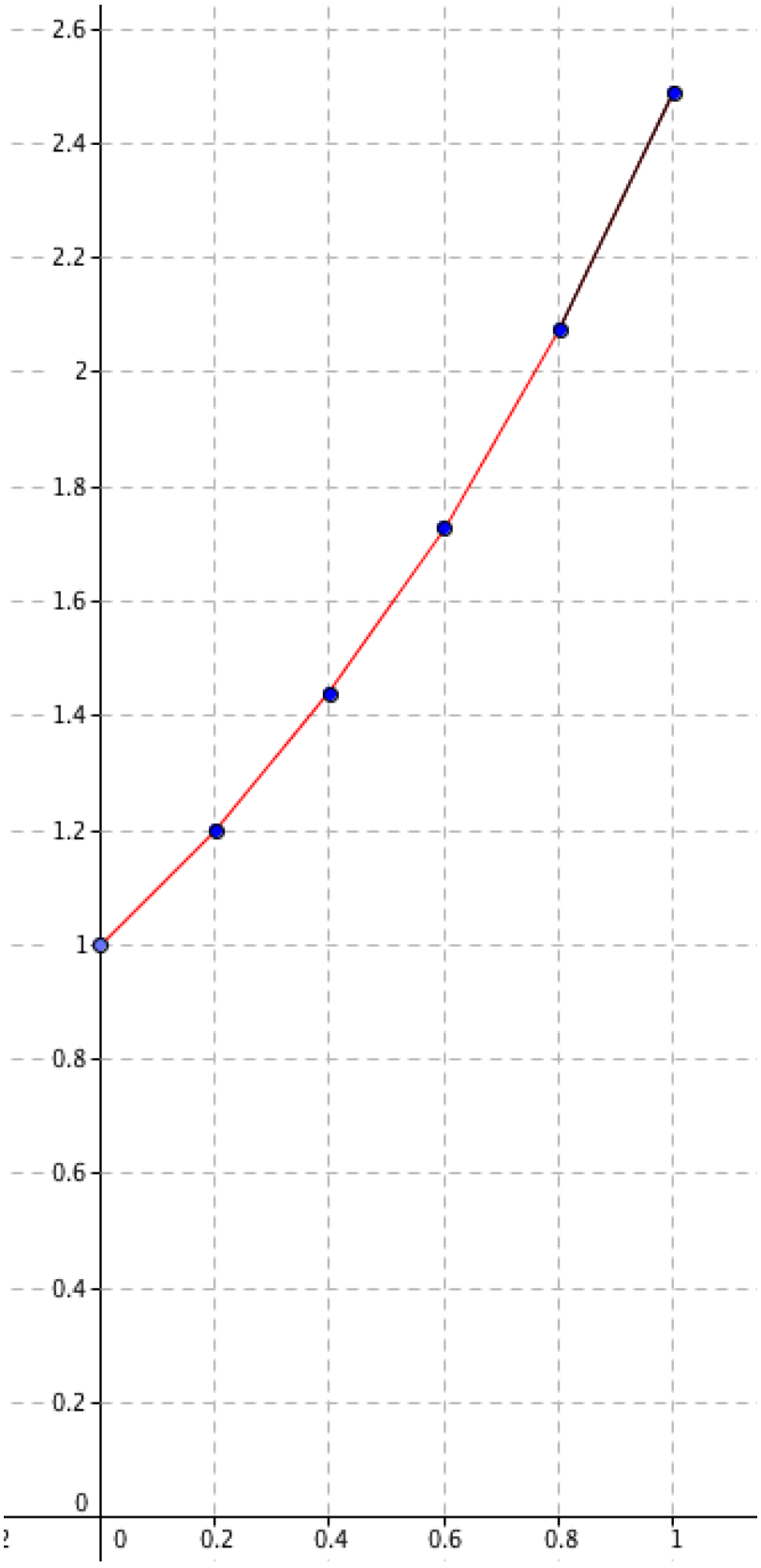
En B, la tangente a pour pente 1,2. Si on avance de 0,2, on monte de 1,2*0,2 soit 0,24. On place le point C(0,4 ;1,44)

En C, la tangente a pour pente 1,44. Si on avance de 0,2, on monte de 1,44*0,2 soit 0,288. On place le point D(0,6 ;1,728)

En D, la tangente a pour pente 1,728. Si on avance de 0,2, on monte de 1,728*0,2 soit 0,3456. On place le point E(0,8 ;2,0736)

En E, la tangente a pour pente 2,0736. Si on avance de 0,2, on monte de 2,0736*0,2 soit 0,41472. On place le point F(1 ;2,48832)

Pour cette dernière construction, on obtient une approximation de $f(1) \approx 2,49$



> Solution n°4 *(exercice p. 10)*

> Solution n°5 *(exercice p. 10)*

Méthode : Démonstration du résultat préliminaire

Posons $h(x) = f(x) \times f(-x)$ et calculons $h'(x)$

$h'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x))$ car la dérivée de $f(-x)$ est $-f'(-x)$

Mais $f' = f$ donc $h'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$

On en déduit donc que $h(x)$ est une fonction constante.

Pour calculer cette constante, il nous suffit de dire que $h(x) = h(0) = f(0) \times f(0) = 1$

CQFD

> Solution n°6 *(exercice p. 10)*

Méthode : Démonstration de l'unicité de la fonction exp

Nous allons supposer qu'il **existe une autre fonction** $g(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

- $g' = g$
- $g(0) = 1$

La fonction *exp* ne s'annulant jamais (cf le résultat préliminaire), nous pouvons poser $q(x) = \dfrac{g(x)}{\exp x}$

Dérivons *q* : $q'(x) = \dfrac{g'(x)\exp x - g(x)\exp' x}{(\exp x)^2} = \dfrac{g(x)\exp x - g(x)\exp x}{(\exp x)^2} = 0$ puisque $g' = g$ et $\exp' = \exp$

La fonction *q* est donc une fonction **constante**. Pour tout *x* réel, $q(x) = q(0) = \dfrac{g(0)}{\exp 0} = 1$

Puisque pour tout $x, q(x) = 1$, c'est donc dire que pour tout $x, g(x) = \exp x$

CQFD

> Solution n°7 *(exercice p. 11)*

calculons f' : $f'(x) = \dfrac{\exp'(x+y)\exp x - \exp(x+y)\exp' x}{(\exp x)^2}$

Or exp'=exp donc $f'(x) = \dfrac{\exp(x+y)\exp x - \exp(x+y)\exp x}{(\exp x)^2} = 0$

Donc f est constante. Cette constante est égale à $f(0) = \exp(y)$

> Solution n°8 *(exercice p. 11)*

On a montré que pour tout nombres x et y, $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp x} = \exp y$

Par conséquent $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

> Solution n°9 *(exercice p. 13)*

$A = e^{2x-3x} = e^{-x}$

> Solution n°10 *(exercice p. 13)*

$B = e^{x} + 2e^{x}e^{-x} = e^{2} + 2$

> Solution n°11 *(exercice p. 13)*

$C = e^{x+2-(x+1)} = e$

> Solution n°12 *(exercice p. 13)*

$D = e^{2x} + 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} + e^{-2x} + 2$

> Solution n°13 *(exercice p. 13)*

$E = e^{2x-1-2x} = e^{-1}$

> Solution n°14 *(exercice p. 14)*

$F = \dfrac{e^{x}(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = e^{x}$

> Solution n°15 *(exercice p. 16)*

L'inéquation peut s'écrire $e^{x^2-3x-4} > e^{0}$. Puisque ***exp*** est strictement croissante cette inéquation se ramène à $x^2 - 3x - 4 > 0$.

Calculons le discriminant Δ pour cette expression du second degré : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$.

Le trinôme a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$

Le **coefficient dominant du trinôme est positif** donc **le trinôme est positif à l'extérieur des racines**.

L'inéquation a donc pour solution $S =]-\infty ; -1[\cup]4 ; +\infty[$.

> Solution n°16 *(exercice p. 16)*

*Méthode : **ROC** Démonstration*

Pour la première limite, on va démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{x} > x$

Soit $f(x) = e^{x} - x$

$f'(x) = e^{x} - 1$

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1$. Par conséquent si $x > 0, e^{x} > e^{0} = 1$

Donc pour tout $x > 0, e^{x} - 1 > 0$ donc *f* est **croissante** sur $[0 ; +\infty[$

Maintenant, $f(0) = 1$ et *f* croissante sur $[0 ; +\infty[$ signifie que pour tout réel *x* positif $f(x) > 0$ et donc $e^{x} > x$

On sait donc que

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

- pour $x > 0, e^x > x$

Le *théorème de comparaison* - p.35 sur les limites nous prouve que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
CQFD
La seconde limite découle de la première. En effet si x tend vers $-\infty$, -x tend vers $+\infty$.
Donc $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$ car du type $\frac{1}{\infty}$

> Solution n°17 *(exercice p. 17)*

$f'(x) = e^x - x$
Or on a vu *précédemment* que $e^x - x$ était positif sur $[0\,;+\infty[$. On peut donc affirmer que *f* est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

> Solution n°18 *(exercice p. 17)*

Puisque *f* est croissante sur $[0\,;+\infty[$, si x>0, f(x)>f(0).

Or f(0)=1 donc pour $x \in [0\,;+\infty[$ on a $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$

Donc pour $x \in [0\,;+\infty[$ on a $e^x > \frac{x^2}{2}$
et en divisant par x positif, on ne change pas le sens de l'inégalité ce qui donne $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$

> Solution n°19 *(exercice p. 17)*

On sait que

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$
- $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ si x est positif

D'après le *théorème de comparaison* - p.35, on peut affirmer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

> Solution n°20 *(exercice p. 18)*

Posons X=-x. Alots $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$
puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et que $\frac{1}{\infty} = 0$

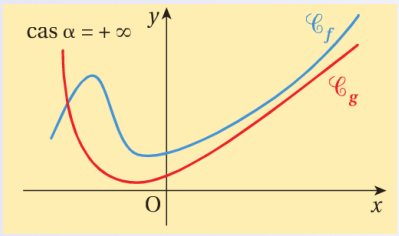
Contenus annexes

- Théorèmes de comparaison

Les théorèmes suivants sont très pratiques pour calculer une limite d'une fonction compliquée en la comparant à des fonctions plus simples dont on connaît la limite.

Fondamental : Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I voisinage de a, a étant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$



Si

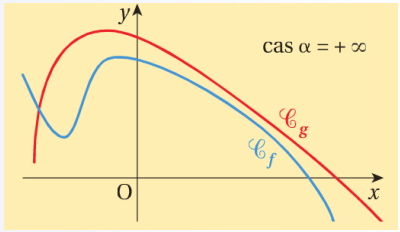
- Pour tout $x \in I, f(x) \geqslant g(x)$
- $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$

Si

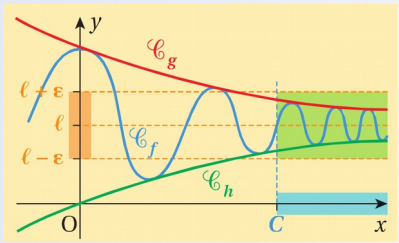
- Pour tout $x \in I, f(x) \leqslant g(x)$
- $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$



Fondamental : Théorème des gendarmes

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I voisinage de a, a étant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$



Si

- Pour tout $x \in I, h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$
- $\lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell$

Alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$

- Somme, produit et quotient de limites

On considère deux fonctions f et g dont on connaît les limites en l'infini ou au en un point. ℓ et ℓ' désignent les limites éventuelles.

Fondamental : Limite d'une somme

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Fondamental : Limite d'un produit

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

Fondamental : Limite d'un inverse

$\lim f$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0 avec $f > 0$	0 avec $f < 0$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Complément

Connaissant le comportement du produit et de l'inverse, on en déduit le comportement de la limite d'un **quotient**, ce dernier pouvant être considéré comme le produit d'une limite par l'inverse de l'autre : $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$

Attention : Formes indéterminées

Dans certains cas, les tableaux ci-dessus ne permettent pas de conclure. Ces cas sont signalés par le pictogramme . Ce sont des **formes indéterminées** dans la mesure ou le résultat peut être n'importe quelle valeur.
On les retient souvent sous la forme condensée

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$

- Dérivée en un point

Définition

Si le quotient $T_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0**, alors on dit que *f est dérivable en a*.
Le nombre réel vers lequel tend le taux d'accroissement $T_a(h)$ est appelé *nombre dérivé de f en a*. On le note $f'(a)$.

Remarque

En reprenant la notation des limites introduite lors de l'exercice précédent, on peut écrire

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

Le nombre h s'étant rapproché de 0, le nombre dérivé $f'(a)$ **ne dépend plus que de a** contrairement au taux d'accroissement $T_a(h)$ qui **dépend à la fois de a et de h**. C'est la différence fondamentale qu'il y a entre le taux d'accroissement et le nombre dérivé : le second étant la limite du premier lorsque h tend vers 0.

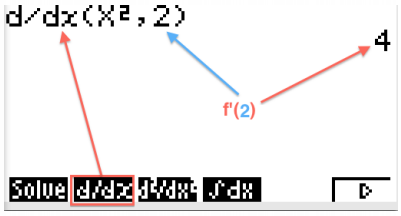
Exemple

En reprenant l'exercice du paragraphe précédent, on peut affirmer avec les notations introduites ici que $f : x \longmapsto x^2$ est **dérivable en 2** et $f'(2) = 4$.

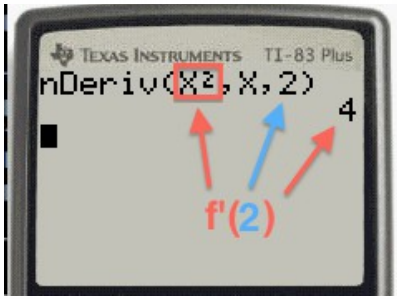
Complément : Utiliser la calculatrice Casio pour calculer f'(a)

Pour calculer la dérivée en un point avec une calculatrice de type CASIO, aller dans `MENU RUN OPTN CALC`.

On calcule ici la dérivée en 2 de la fonction $f(x) = x^2$, c'est à dire $f'(2)$.



Complément : Utiliser la calculatrice TI pour calculer f'(a)



Pour calculer la dérivée en un point avec une calculatrice de type TI, aller dans `MATH 8 :nDeriv(`.

On calcule ici la dérivée en 2 de la fonction $f(x) = x^2$, c'est à dire $f'(2)$.

- Tangente à une courbe en un point

Si f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est la pente de la tangente à C_f au point d'abscisse A.

Fondamental

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a est donnée par :
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Complément

On peut vérifier que cette équation de droite correspond bien à la tangente à C_f en $x = a$ puisque :

- sa pente est $f'(a)$ (coefficient en facteur devant x)
- lorsque $x = a$, $y = f(a)$ donc la droite passe bien par le point $A(a\,;f(a))$

Une droite pouvant être **déterminée par sa pente et un point**, c'est donc bien notre tangente.