Terminale S

Limites de fonctions

1.0

Olivier Lécluse

Juillet 2013

Table des matières

Objectifs

Dans ce chapitre, nous étudierons les notions de

- limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini
- limite infinie d'une fonction en un point
- limite de somme, produit, quotient et composes de fonctions
- asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées

Nous utiliserons également des techniques de comparaison et d'encadrement pour déterminer des limites.

Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent sur les suites la notion de limite en l'infini : lorsque n devient très grand, les valeurs u_n d'une suite peuvent se rapprocher d'une certaine valeur limite, aller vers l'infini, ou alors ne pas donner de limite du tout.

Dans le cadre des fonctions, nous rencontrerons également cette notion de limite lorsque x tend vers l'infini mais verrons également des limites lorsque x s'approche d'une valeur réelle pour laquelle la fonction n'est pas définie.

Limites en l'infini

I

Dans cette partie, on s’appuiera sur les connaissances de limites de suites vues au chapitre précédent.

L'idée générale reste la même à savoir que l'on va donner à x des valeurs de plus en plus grandes (ou petites si x est négatif) et observer le comportement de f(x) lorsqu'on s'approche de l'infini.

Nous allons voir que comme pour les suites, plusieurs cas sont possibles :

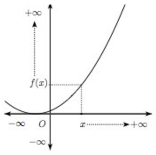
- Les valeurs de la fonction deviennent de plus en plus grandes (ou plus petites si f(x) est négatif)
- Les valeurs de la fonction s'approchent d'un nombre réel bien déterminé
- Les valeurs de la fonction ne permettent pas d'obtenir de limite particulière

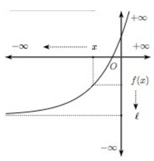
A. Exercice : Approche intuitive

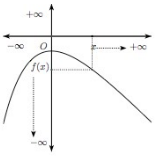
[Solution n°1 p 29]

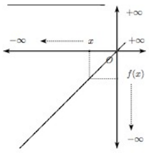
Dans cette activité, nous allons étudier plusieurs comportements en l'infini.

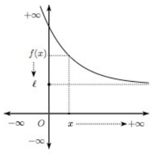
Glisser les différentes courbes dans la catégorie qui leur correspond en fonction du comportement de la fonction en l'infini.

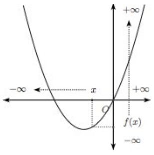
1 - 

2 - 

3 - 

4 - 

5 - 

6 - 

La fonction s'approche d'un réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$	La fonction s'approche d'un réel ℓ lorsque x tend vers $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$	La fonction tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	La fonction tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	La fonction tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	La fonction tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

B. Approche d'une limite infinie en l'infini

On considère la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f\ : x \longmapsto \sqrt{x}$

Question 1

[Solution n°2 p 30]

D'après la courbe représentative de la fonction, conjecturez sa limite en $+\infty$

On se souvient de la définition **rigoureuse** d'une *limite infinie d'une suite* - p.39. Nous allons nous en inspirer pour montrer que la fonction *f* peut prendre des valeurs arbitrairement grandes pour peu que l'on prenne des valeurs de *x* suffisamment grandes.

Question 2

[Solution n°3 p 30]

Soit *A* un réel positif. Démontrer qu'il existe un nombre *m* tel que $f(x) > A$ dès que $x > m$

Indice :

On pourra utiliser le résultat que la fonction racine est croissante.

C. Limite infinie à l'infini

Définition

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle $]a\ ;+\infty[$

On dit que *f a pour limite* $+\infty$ *en* $+\infty$ si la fonction *f* peut prendre des valeurs plus grandes que n'importe quel réel donné dès que *x* est assez grand

On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Complément : à titre d'exercice...

On peut donner des définitions analogues d'une

- limite égale à $-\infty$ en $+\infty$
- limite égale à $-\infty$ en $-\infty$
- limite égale à $+\infty$ en $-\infty$

Exemple : Limites usuelles

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Complément

Pour démontrer ces résultats, inspirez-vous de l'activité précédente.

Remarque

Si une fonction *f* admet une limite infinie en $+\infty$, alors la suite de terme général $u_n = f(n)$ a la même limite.

Attention

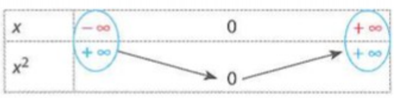
La réciproque est fausse ! !

exemple : $f(x) = x\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi x\right)$

$f(n) = n$ donc diverge vers $+\infty$, mais $f(x)$ oscille sans cesse et n'a pas de limite.

Méthode : Dresser un tableau de variation complet

Dorénavant, on fera figurer dans les tableaux de variations les limites éventuelles.



On lit sur ce tableau que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

D. Approche d'une limite finie en l'infini

On considère la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f\ :x \longmapsto \dfrac{9x+4}{3x-6}$

Question 1

[Solution n°4 p 30]

A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de f en $+\infty$

Indice :

On pourra calculer des images par f de nombres de plus en plus grand

Cette conjecture ne constitue en rien une preuve. Néanmoins, si elle est vraie, cela signifie qu'on peut s'approcher de la valeur obtenue autant que l'on souhaite. Vérifions cela à l'aide d'un algorithme :

```
S prend la valeur 3,0000001
X prend la valeur 10
Tant Que f(X)>S
... X prend la valeur X*10
Afficher X
```

Question 2

[Solution n°5 p 30]

Quel est le rôle de cet algorithme ? A quoi servent les variables ?
Expliquer le choix de la méthode utilisée.

Question 3

[Solution n°6 p 30]

Programmer cet algorithme et donner la valeur obtenue en sortie.

Indice :

On pourra utiliser la calculatrice ou le langage Python en ligne[1].

Question 4

[Solution n°7 p 31]

Résoudre l'équation $f(x) = 3$.
Interpréter ce résultat.

Question 5

[Solution n°8 p 31]

Calculer $f(10^{11})$. Conclure.

Nous allons à présent démontrer rigoureusement notre conjecture. Pour cela, nous allons montrer que nous pouvons nous approcher aussi près que l'on veut de la limite 3, dès lors que x est suffisamment grand.

Question 6

[Solution n°9 p 31]

Montrer que $f(x) > 3$ pour tout réel de $]2\,;+\infty[$

Question 7

[Solution n°10 p 31]

Montrer qu'il existe un nombre *m* tel que si $x > m, 0 < f(x) - 3 < 10^{-n}$.
Interpréter ce résultat.

1 - http://www.pythontutor.com/

E. Limite finie en l'infini

Définition

Si *f* est une fonction définie sur un intervalle $]a\,;+\infty[$, *f* a pour limite le réel ℓ quand **x tend vers l'infini** si les images **f(x) sont aussi proches que l'on veut** de ℓ, à condition de prendre **x suffisamment grand**.

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

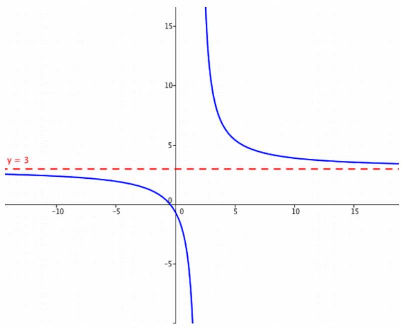
On peut formaliser les choses en s'inspirant de la définition donnée pour les *limites finies de suites* - p.40 :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si **pour tout intervalle ouvert** $I_\epsilon =]\ell - \epsilon\,;\ell + \epsilon[$, **il existe un réel** *m* tel que $f(x) \in I_\epsilon$ dès que $x > m$

Complément

La droite d'équation $y = \ell$ est alors *asymptote horizontale* à la courbe en $+\infty$

Exemple



Avec la fonction homographique de l'activité précédente, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ mais on peut aussi montrer de manière analogue que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$.

Par conséquent, la droite d'équation $y = 3$ est *asymptote horizontale* à la courbe C_f en $-\infty$ **et** en $+\infty$

Graphiquement, la courbe **s'approche de la droite autant que l'on souhaite**, sans toutefois ne jamais la toucher comme on l'a démontré dans l'activité précédente.

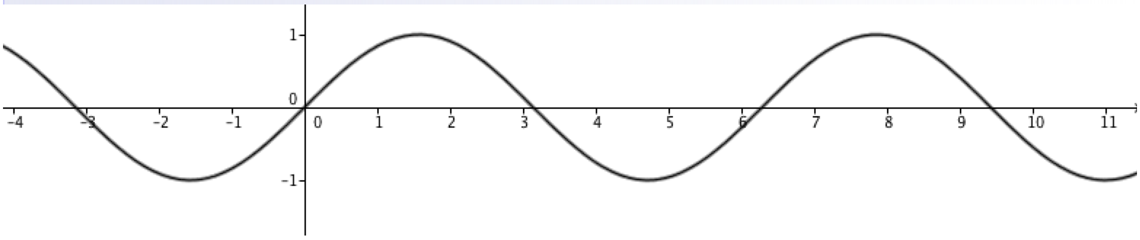
Fondamental : Limite de référence

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Par conséquent **l'axe des abscisses est asymptote horizontale** pour la courbe représentative de la fonction inverse.

Attention

Certaines fonctions n'ont pas de limite, finie ou infine en l'infini. C'est le cas par exemple des fonction *sin* et *cos* qui oscillent sans arrêt.


1
0
-1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Limite infinie en un point

II

Il existe un autre type de limites : celles en une valeur particulière qui pose problème. Cette situation inédite n'existe pas dans le monde des suites.

L'exemple le plus simple pour appréhender cette notion est de considérer la fonction inverse en 0 : On sait que l'inverse de 0 n'existe pas. On sait également que l'inverse d'un nombre positif très proche de 0 est un nombre très grand.

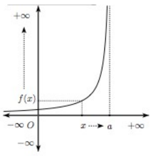
peut à partir de ce constat aborder la notion de limite en un point.

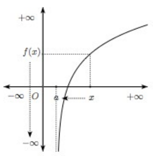
A. Exercice

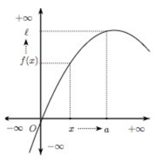
[Solution n°11 p 32]

Dans cette activité, nous allons étudier plusieurs comportements en un point d'abscisse a.

Glisser les différentes courbes dans la catégorie qui leur correspond en fonction du comportement de la fonction au point d'abscisse $x = a$.

1 - 

2 - 

3 - 

La fonction s'approche d'un La fonction s'approche de La fonction s'approche de réel ℓ lorsque x tend vers a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

$+\infty$ lorsque x tend vers a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

$-\infty$ lorsque x tend vers a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

B. Exercice

On considère à nouveau la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f\ : x \longmapsto \dfrac{9x+4}{3x-6}$

Mais cette fois-ci, nous allons étudier son comportement au voisinage de la valeur interdite 2

Question 1

[Solution n°12 p 32]

Calculer f(2,1), f(2,01), f(2,001), f(2)

Faire une conjecture sur le comportement de f aux alentours de 2.

Cette conjecture ne constitue en rien une preuve. Néanmoins, si elle est vraie, cela signifie qu'on peut obtenir des valeurs arbitrairement grandes en s'approchant suffisamment de 2. Vérifions cela à l'aide d'un algorithme :

```
S prend la valeur 10000
X prend la valeur 2,1
N prend la valeur 1
Tant Que f(x)<S
... N prend la valeur N+1
... X prend la valeur 2+1/10^N
Afficher X
```

Question 2

[Solution n°13 p 32]

Quel est le rôle de cet algorithme ? A quoi servent les variables ?

Expliquer le choix de la méthode utilisée.

Question 3

[Solution n°14 p 33]

Programmer cet algorithme et donner la valeur obtenue en sortie.

$f(x)$ peut-il dépasser 1000000 ?

Indice :

On pourra utiliser la calculatrice ou le langage Python en ligne[2]*.*

Question 4

[Solution n°15 p 33]

Interpréter graphiquement ce résultat

Indice :

On pourra chercher l'équation d'une asymptote correspondant à cette limite que l'on vient de conjecturer.

2 - http://www.pythontutor.com/

C. Limite infinie en un réel

Définition

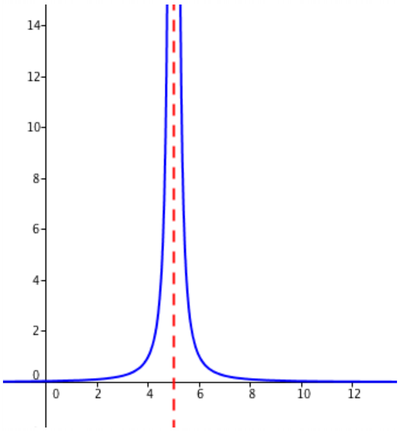
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle $]a\,;b[$

On dit que *f* tend vers +∞ quand x tend vers *a* par valeur supérieure si on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut dès que *x* est suffisamment proche de *a* dans l'intervalle $]a\,;b[$

En d'autres termes, pour tout nombre *A*, il existe un réel α>0 tel que $f(x) > A$ dès que $x \in]a\,;a+\alpha[$

On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

Complément



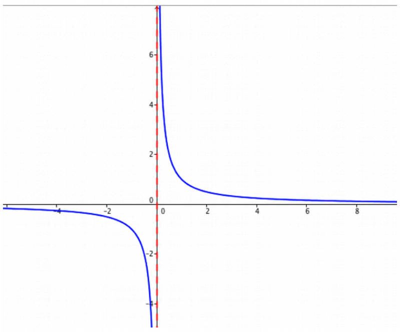
Si la limite par valeur supérieure est égale à la limite par valeur inférieure, on parle simplement de limite lorsque x tend vers a.

Dans l'exemple ci-contre, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Fondamental : Asymptote verticale

Dans le cas d'une limite infinie en un point d'abscisse finie, on est en présence d'une **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction.

Exemple : Cas de la fonction inverse



On sait que l'inverse d'un nombre positif très petit est très grand, et que ce phénomène s'inverse pour les nombres négatifs. Nous avons donc le résultat suivant :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe de la fonction inverse.

D. Lire et interpréter un tableau de variations

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous. On note C_f sa courbe représentative.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	4

Question 1

[Solution n°16 p 34]

Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

Question 2

[Solution n°17 p 34]

Quelles sont les limites données dans le tableau ? Les écrire en utilisant la notation mathématique.

Question 3

[Solution n°18 p 34]

Quelles sont les asymptotes à la courbe C_f

Question 4

[Solution n°19 p 34]

Donner une courbe représentative possible de la fonction f

Calcul de limites

III

Nous allons utiliser plusieurs techniques pour calculer des limites :

- Partir de limites de fonctions usuelles connues puis par somme, produit ou composition, en déduire la limite recherchée
- Utiliser des propriétés d'encadrement par des fonctions simples pour déterminer des limites de fonctions plus complexes

Certaines opérations sur les limites seront interdites car aboutissant à des formes indéterminées (du type ∞-∞)

A. Somme, produit et quotient de limites

On considère deux fonctions f et g dont on connaît les limites en l'infini ou au en un point. ℓ et ℓ' désignent les limites éventuelles.

Fondamental : Limite d'une somme

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Fondamental : Limite d'un produit

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

Fondamental : Limite d'un inverse

$\lim f$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0 avec $f > 0$	0 avec $f < 0$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Complément

Connaissant le comportement du produit et de l'inverse, on en déduit le comportement de la limite d'un **quotient**, ce dernier pouvant être considéré comme le produit d'une limite par l'inverse de l'autre : $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$

Attention : Formes indéterminées

Dans certains cas, les tableaux ci-dessus ne permettent pas de conclure. Ces cas sont signalés par le pictogramme . Ce sont des **formes indéterminées** dans la mesure ou le résultat peut être n'importe quelle valeur.
On les retient souvent sous la forme condensée

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$

B. Calculs de limites en utilisant les opérations simples

Calculer les limites suivantes :

Question 1

[Solution n°20 p 34]

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 + x$$

Question 2

[Solution n°21 p 35]

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x$$

Indice :

Attention à la forme indéterminée

Question 3

[Solution n°22 p 35]

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{x}$$

Indices :

Attention à la forme indéterminée

On pourra développer le numérateur et se ramener à une somme de fonctions sont on connaît les limites

Question 4

[*Solution n°23 p 35*]

$\lim_{x \to 2} \frac{9x+4}{3x-6} = +\infty$

Indice :

Attention au signe de 3x-6 ! !

C. Théorème de composition

Définition

Composer deux fonction signifie les enchaîner l'une après l'autre.

Par exemple la fonction $f \ : x \longmapsto \sqrt{\frac{3}{x}+7}$ peut se calculer en calculant $u \ : x \longmapsto \frac{3}{x}+7$ suivie de $v \ : x \longmapsto \sqrt{x}$

Ainsi $f(x) = v(u(x))$. On note parfois $f = v \circ u$. La fonction la plus à l'intérieur est celle qui se fait en premier.

Fondamental : Théorème de composition (admis)

Soit α, β et γ des réels ou $\pm\infty$

On considère deux fonctions *u* et *v* telles que

- $\lim_{x \to \alpha} u(x) = \beta$
- $\lim_{x \to \beta} v(x) = \gamma$

Alors $\lim_{x \to \alpha} v(u(x)) = \gamma$

Remarque

Ce théorème est un peu abstrait dans son énoncé mais son utilisation est très intuitive comme on va le voir sur l'exemple ci-dessous :

Exemple

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{3}{x}+7}$

On commence par la fonction la plus à l'intérieur :

On sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$ et en ajoutant 7 : $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} + 7 = 7$

On regarde le comportement de la fonction extérieure en 7 : ici $x \longmapsto \sqrt{x}$ quand x se rapproche de 7 ne pose pas de problèmes et tend vers $\sqrt{7}$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{3}{x}+7} = \sqrt{7}$

D. Exercice

Question

[Solution n°24 p 36]

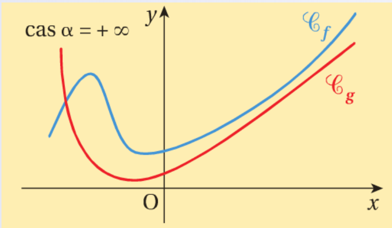
Calculer Calculer $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{\frac{3}{x}+7}$

E. Théorèmes de comparaison

Les théorèmes suivants sont très pratiques pour calculer une limite d'une fonction compliquée en la comparant à des fonctions plus simples dont on connaît la limite.

Fondamental : Théorème de comparaison

Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur un intervalle I voisinage de α, α étant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$



Si

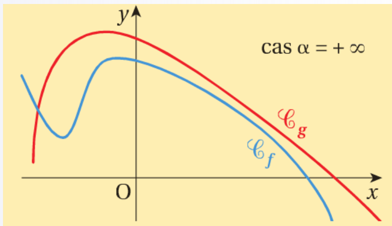
- Pour tout $x \in I, f(x) \geqslant g(x)$
- $\lim_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$

Alors $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$

Si

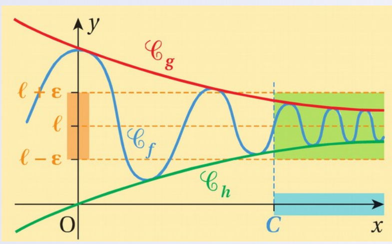
- Pour tout $x \in I, f(x) \leqslant g(x)$
- $\lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$

Alors $\lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$



Fondamental : Théorème des gendarmes

Soit *f* , *g* et *h* trois fonctions définies sur un intervalle I voisinage de α, α étant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$



Si

- Pour tout $x \in I, h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$
- $\lim_{x\to\alpha} h(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = \ell$

Alors $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell$

F. Exercice

Utiliser les théorèmes de comparaison pour calculer des limites

Question 1

[*Solution n°25 p 36*]

Calculer $\lim_{x \to +\infty} x^3 + x\cos x$

Indices :

On pourra remarquer que $cos(x) \geqslant -1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

Calculer $\lim_{x \to +\infty} x^3 - x$

Question 2

[*Solution n°26 p 36*]

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{x\cos x}{x^2 + 1}$

Indices :

On pourra remarquer que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

On pourra calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1}$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$

Test final

IV

Pour ce test d'auto-évaluation final, vous devez obtenir un minimum de 80% de bonnes réponses. En cas d'échec, révisez la section du cours qui vous a posé des difficultés et retentez à nouveau le test.

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

- [ ] $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = -\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x)$
- [ ] $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = -\infty$
- [ ] $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$
- [ ] $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

Exercice 2

Les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ *et* $g(x) = 3 - \dfrac{4}{x^2+1}$

- [ ] ont les mêmes asymptotes verticales
- [ ] ont les mêmes asymptotes horizontales
- [ ] n'ont pas d'asymptotes communes
- [ ] n'ont pas d'asymptotes verticales

Exercice 3

Les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{-4}{x^2 - 5x + 6}$ *et* $g(x) = \dfrac{-3}{x^2 + x - 12}$ *ont :*

- [ ] Les mêmes asymptotes verticales
- [ ] Le même nombre de valeurs interdites
- [ ] Une asymptote verticale commune
- [ ] Une asymptote horizontale commune

Exercice 4

Soit f une fonction dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
f	0	↗	2	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

- [ ] Il est possible d'obtenir un point d'ordonnée $+4,2.10^{38}$
- [ ] Il est possible d'obtenir un point d'ordonnée inférieure à $-4,2.10^{38}$
- [ ] $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$
- [ ] $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$
- [ ] La fonction *f* possède une asymptote horizontale
- [ ] y=-2 est une asymptote à la courbe C_f

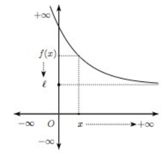
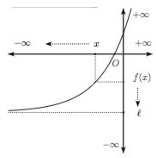
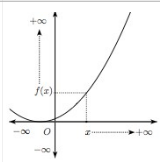
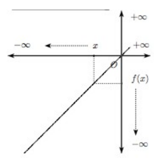
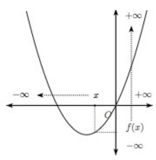
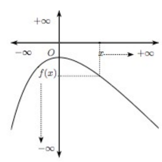
Exercice 5

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$*, alors*

- ○ La droite d'équation $x=2$ est une asymptote à la courbe en $-\infty$
- ○ La droite d'équation $y=2$ est une asymptote à la courbe en $-\infty$
- ○ L'équation $f(x)=2$ n'admet aucune solution

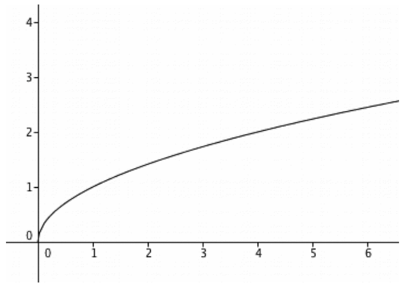
Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 9)

La fonction s'approche d'un réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$	
La fonction s'approche d'un réel ℓ lorsque x tend vers $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$	
La fonction tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	
La fonction tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	
La fonction tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	
La fonction tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	

> Solution n°2 (exercice p. 10)

On sait que la courbe est une parabole inversée. On peut conjecturer à la lecture de la courbe que celle-ci "grimpe à l'infini" quand x devient de plus en plus grand. Donc on peut penser que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



> Solution n°3 (exercice p. 10)

Posons $m = A^2$. On sait que la fonction racine est croissante donc elle conserve les inégalités.

Par conséquent, si $x > m, f(x) > f(m)$. Or $f(m) = \sqrt{A^2} = A$ car $A > 0$ ce qui montre le résultat demandé.

> Solution n°4 (exercice p. 12)

On calcule à l'aide de la machine

- $f(100) \approx 3,075$
- $f(1000) \approx 3,007$
- $f(1000000) \approx 3,00001$

On peut donc émettre la conjecture que la fonction s'approche de 3 lorsque x tend vers l'infini.

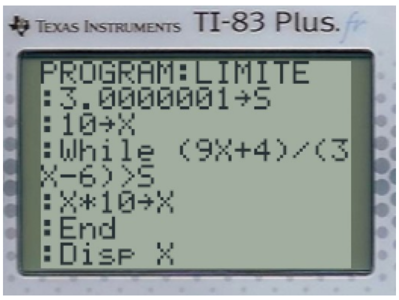
> Solution n°5 (exercice p. 12)

Cet algorithme permet de savoir si on peut s'approcher de 3 à une distance de moins de 0000001.

Dans cet algorithme S désigne le seuil d'approche de la valeur limite 3. X désigne un nombre de plus en plus grand.

La convergence de la fonction vers le nombre 3 peut être assez lente (on l'a vu avec f(1000000)). Pour éviter à la calculatrice de faire des millions de passage dans la boucle et tourner pendant des heures, on donne à X des valeurs de plus en plus grandes en le multipliant par 10 à chaque passage. On obtient ainsi une croissance exponentielle nous permettant de nous approcher plus vite de l'infini.

> Solution n°6 (exercice p. 12)



Le programme ci-dessus, ou ci-contre en langage TI, retourne la valeur 100000000

> Solution n°7 (exercice p. 12)

si $x \neq 2, \dfrac{9x+4}{3x-6} = 3 \iff 9x+4 = 3(3x-6)$

donc si $x \neq 2, \dfrac{9x+4}{3x-6} = 3 \iff 9x+4 = 9x-18$ c'est à dire $4 = -18$! !

l'équation $f(x) = 3$ n'a donc pas de solutions.

On peut en conclure que même si on peut s'approcher de 3 autant que l'on souhaite, il n'est pas possible pour *f* d'atteindre exactement la valeur 3. La limite d'une fonction n'est pas nécessairement une valeur prise par la fonction.

> Solution n°8 (exercice p. 12)

La calculatrice semble montrer que $f(10^{11}) = 3$. Néanmoins, l'équation que nous venons de résoudre montre que cela est impossible, la valeur 3 ne pouvant être atteinte par *f*.

Il faut donc en conclure qu'**il faut être critique à l'égard des résultats fournis par la calculatrice**. Ceux-ci sont toujours des valeurs approchées.

> Solution n°9 (exercice p. 12)

si $x \in]2\,;+\infty[$, on a $3x-6 > 0$. Par conséquent :

si $x \in]2\,;+\infty[, \dfrac{9x+4}{3x-6} > 3 \iff 9x+4 > 3(3x-6) \iff 4 > -18$

Or cette inégalité est toujours vraie pour $x > 2$, ce qui démontre le résultat cherché.

> Solution n°10 (exercice p. 12)

$$f(x) - 3 = \frac{9x+4}{3x-6} - 3 = \frac{9x+4}{3x-6} - \frac{9x-18}{3x-6} = \frac{22}{3x-6}$$

Par conséquent $f(x) - 3 < 10^{-n} \iff \dfrac{22}{3x-6} < 10^{-n}$.

Or si $x > 2$, alors $3x-6 > 0$ donc l'inéquation se ramène par produit par $(3x-6) \times 10^{n}$ à $22 \times 10^{n} < 3x - 6$

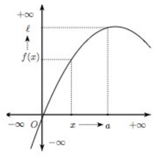
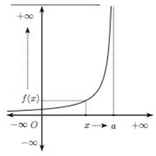
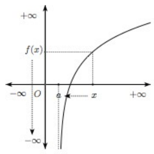
donc $x > \dfrac{22 \times 10^{n} + 6}{3}$

Posons $m = \dfrac{22 \times 10^{n} + 6}{3}$, si $x > m$, on vient de démontrer que $f(x) - 3 < 10^{-n}$

On peut donc s'approcher avec la précision que l'on veut de la valeur 3, à condition de prendre x suffisamment grand.

Cela montre donc que la limite de la fonction *f* est 3 en $+\infty$

> Solution n°11 (exercice p. 15)

La fonction s'approche d'un réel ℓ lorsque x tend vers a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$	
La fonction s'approche de $+\infty$ lorsque x tend vers a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	
La fonction s'approche de $-\infty$ lorsque x tend vers a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	

> Solution n°12 *(exercice p. 16)*

$f(2,1) \approx 76,3$
$f(2,01) \approx 736,3$
$f(2,001) \approx 7336,3$
$f(2)$ n'est **pas défini** !

Il semblerait donc que lorsqu'on s'approche de 2, par **valeur supérieure**, la fonction *f* tende vers $+\infty$

Attention

Bien faire attention ici à l'ensemble de définition : on a $x > 2$ compte tenu de l'intervalle donné au départ.

Cela est important dans le cas de notre fonction car si on s'approche de 2 par valeur inférieure, la limite est $-\infty$!

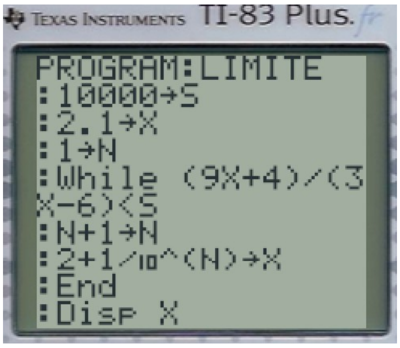
> Solution n°13 *(exercice p. 16)*

Cet algorithme permet de savoir si on peut dépasser la valeur 10000 en s'approchant suffisamment de 2.

Dans cet algorithme S désigne le seuil à dépasser. X désigne un nombre de plus en plus proche de 2. Pour cela, X est calculé par la formule $2 + \dfrac{1}{10^N}$ où N est une variable entière qui augmente de 1 à chaque passage de boucle.

On s'approche ainsi de plus en plus de deux, par valeur supérieure. Les valeurs prises par X sont 2,1, 2,01, 2,001, 2,0001 etc...

> Solution n°14 *(exercice p. 16)*



Le programme ci-dessus, ou ci-contre en langage TI, retourne la valeur 2,0001

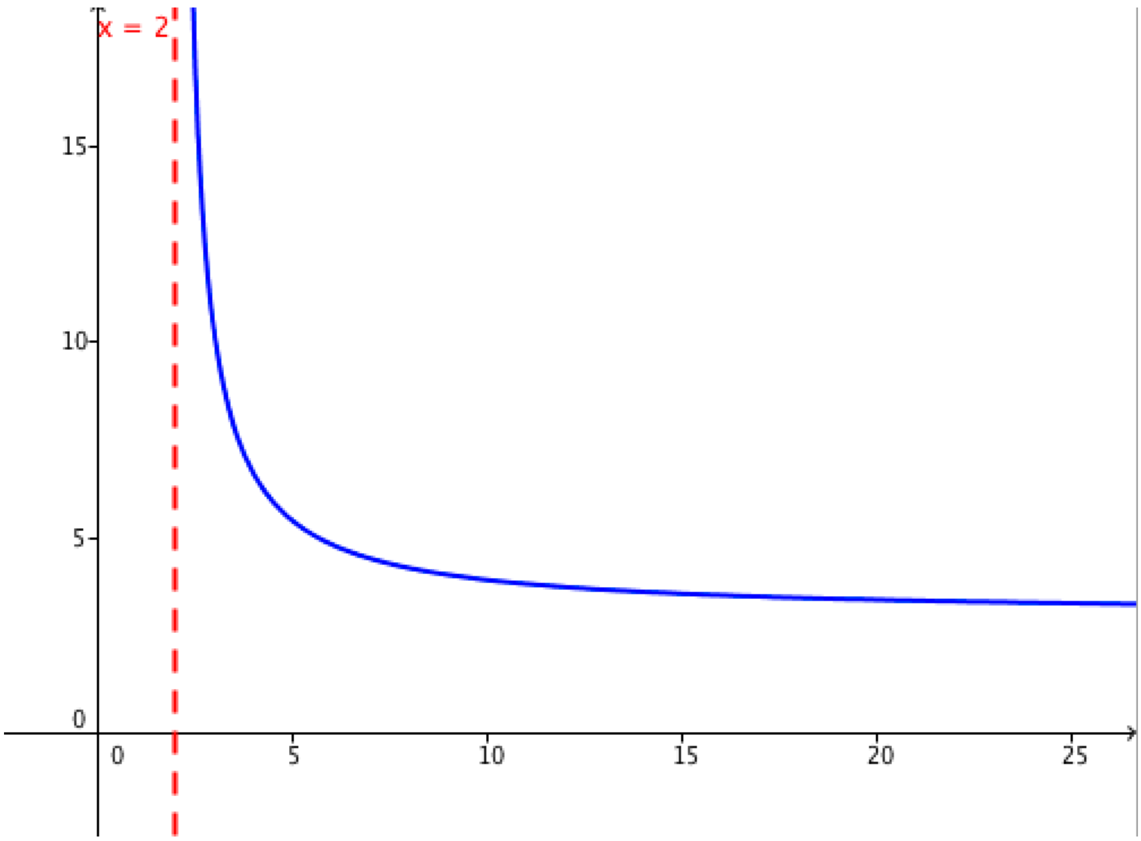
Peut-on dépasser 1000000 ?

En initialisant la variable S à 1000000, on obtient en sortie X=2,000001. Il est donc possible de dépasser 1000000 et on imagine bien que quelque soit la taille du nombre choisi, en s'approchant suffisamment de 2, il sera possible de dépasser ce seuil.

> Solution n°15 *(exercice p. 16)*

Plus on *x* s'approche par la droite de la valeur interdite 2, plus f(x) grimpe vers l'infini.

La droite verticale d'équation $x = 2$ est donc une **asymptote verticale à la courbe** C_f dans la mesure où la courbe s'en approche sans jamais l'atteindre, x=2 étant une valeur interdite pour la fonction *f*.



> Solution n°16 (exercice p. 18)

f est définie sur $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$

> Solution n°17 (exercice p. 18)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$

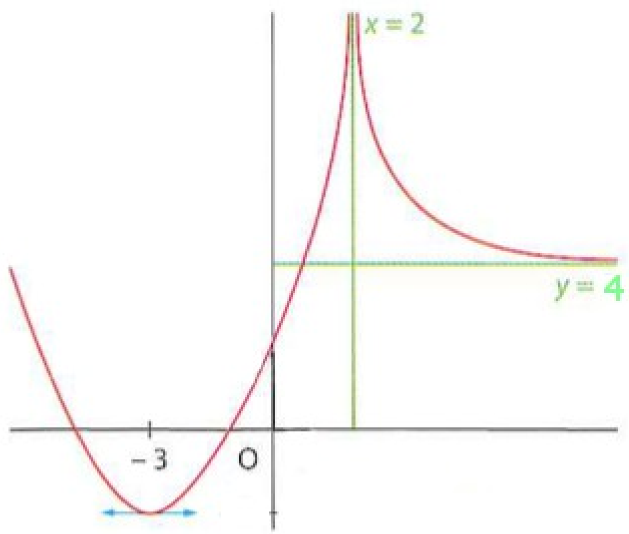
> Solution n°18 (exercice p. 18)

La première limite ne donne pas lieu une asymptote. C'est une limite infinie en l'infini.

La seconde limite : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ est une limite infinie en un point fini. Elle donne lieu à une asymptote verticale d'équation $x = 2$

La dernière limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$ est une limite finie en l'infini. Elle donne lieu à une asymptote horizontale d'équation $y = 4$

> Solution n°19 (exercice p. 18)



> Solution n°20 (exercice p. 20)

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x = +\infty$ (forme ∞+∞) bien déterminée

> Solution n°21 (exercice p. 20)

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x = +\infty$ est de la forme ∞-∞ qui est déterminée

Méthode : Mettre en facteur le terme dominant

Pour lever ce type d'indétermination, il est courant de **mettre en facteur le terme prépondérant dans l'expression**. Ici, *x^2* l'emporte sur x. C'est donc *x^2* que nous mettrons en facteur.

$x^2 - x = x^2(1 - \frac{1}{x})$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 - 0 = 1$ (voir limite d'une somme) et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

Donc la limite du produit est connue (type $\infty \times 1$). On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x = +\infty$

> Solution n°22 *(exercice p. 20)*

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. On abouti donc à une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$

Méthode : Casser la fraction

Pour lever cette indétermination, on va développer le numérateur afin de séparer la fraction en une somme de fractions.

$$\frac{(x+1)^2}{x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = x + 2 + \frac{1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2 = +\infty$ par somme de fonctions de limite finie et infinie

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ car c'est une fonction usuelle.

La somme de ces deux limites est du type $0 + \infty$

Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{x} = +\infty$

> Solution n°23 *(exercice p. 21)*

Au voisinage de 2, 9x+4 est proche de 22 donc est positif. Par conte 3x-6 change de signe :

- Si $x > 2, 3x - 6 > 0$ et donc dans ce cas $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{9x + 4}{3x - 6} = +\infty$
- Si $x < 2, 3x - 6 < 0$ et donc dans ce cas $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{9x + 4}{3x - 6} = -\infty$

> Solution n°24 *(exercice p. 22)*

On commence par la fonction la plus à l'intérieur :

On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{3}{x} = +\infty$ et en ajoutant 7 : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{3}{x} + 7 = +\infty$

On regarde le comportement de la fonction extérieure en $+\infty$: ici $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

On en déduit pas composition que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{\frac{3}{x} + 7} = +\infty$

> Solution n°25 *(exercice p. 23)*

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos(x) \geqslant -1$

Donc si $x > 0, x\cos x \geqslant -x$

Donc au voisinage de $+\infty$, on a $x^3 + x\cos x \geqslant x^3 - x$

Calculons à présent $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 - x$

Méthode : Lever l'indétermination

Pour lever l'indétermination ∞-∞, on met le terme dominant x^3 en facteur :

$x^3 - x = x^3\left(1 - \frac{x}{x^3}\right) = x^3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

- Or $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$
- De plus $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$

Donc par la règle du produit des limites $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 - x = +\infty$

Méthode : Appliquer le théorème de comparaison

On sait donc que

- Pour tout $x > 0, x^3 + x\cos x \geqslant x^3 - x$
- De plus $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 - x = +\infty$

D'après le théorème de comparaison on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 + x\cos x = +\infty$

> Solution n°26 *(exercice p. 23)*

On sait que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc si $x > 0, -x \leqslant x\cos x \leqslant x$

en divisant par $x^2 + 1 > 0$, on obtient alors l'encadrement suivant :

Pour tout $x > 0, \frac{-x}{x^2+1} \leqslant \frac{x\cos x}{x^2+1} \leqslant \frac{x}{x^2+1}$

Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+1}$

Méthode : Lever l'indétermination

On va simplifier la fraction en mettant en facteur au dénominateur le terme dominant :

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$ en simplifiant par x.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

Par passage à l'inverse, on obtient une limite nulle.

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

On en déduit également par passage à l'opposé que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^2+1}$

Méthode : Utiliser le théorème des gendarmes

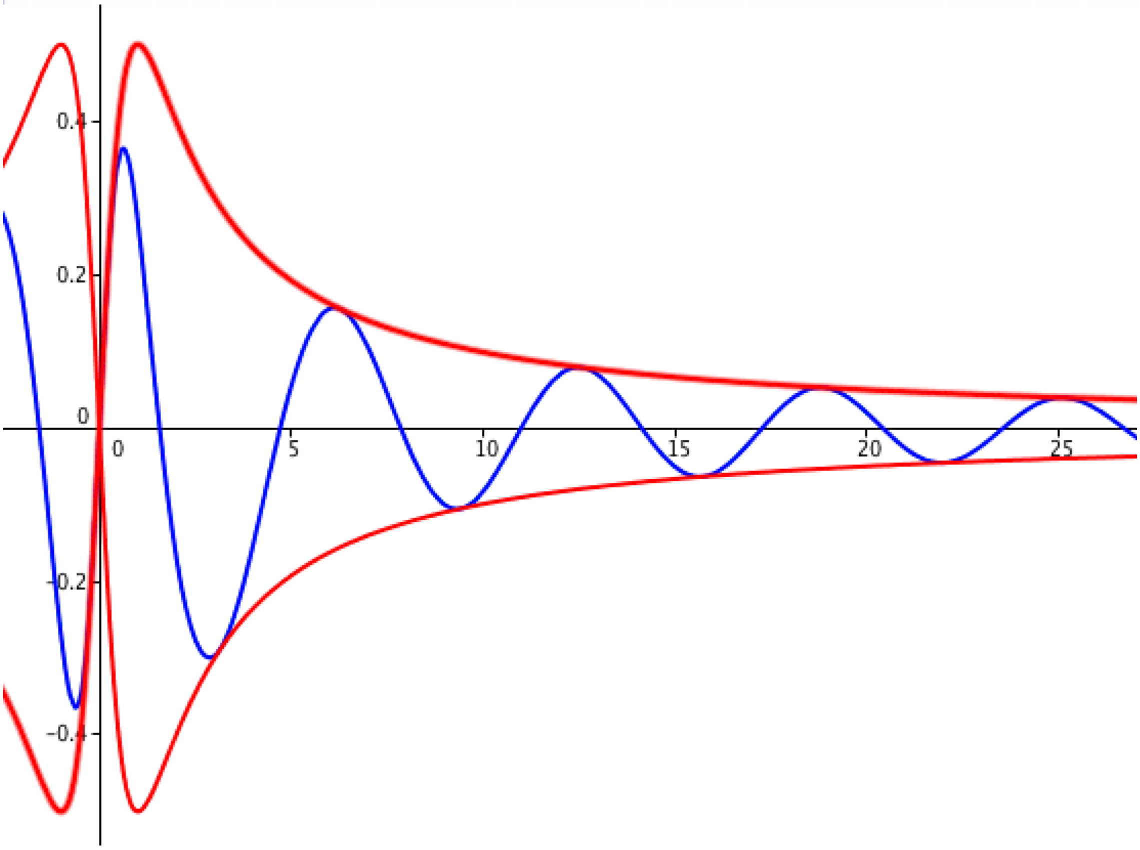
On sait donc que

- Pour tout $x > 0, \frac{-x}{x^2+1} \leqslant \frac{x\cos x}{x^2+1} \leqslant \frac{x}{x^2+1}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0$

Donc en appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1} = 0$

Voici graphiquement l'interprétation de ces calculs. On voit assez nettement la fonction de départ en bleu encadrée par les deux "gendarmes" en rouge qui la forcent à tendre vers 0.


0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0
5
10
15
20
25

Contenus annexes

- Limite infinie

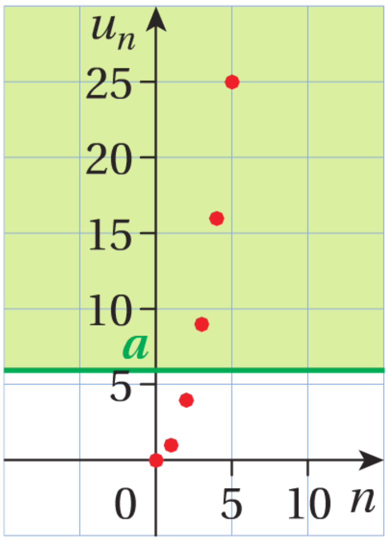
Définition

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ (où A est un réel) contient tous les termes u_n de la suite à partir d'un certain rang.
On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;B[$ (où B est un réel) contient tous les termes u_n de la suite à partir d'un certain rang.
Cela revient à dire que $(-u_n)$ tend vers $+\infty$
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Exemple

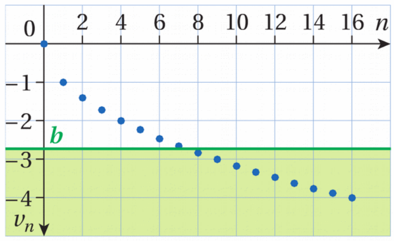
La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$

En effet, soit A un réel positif, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite dès lors que $n > \sqrt{A}$ (puisque la fonction carré est **croissante** sur $\mathbb{R}^+$)



Exemple

La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\sqrt{n}$ a pour limite $-\infty$



En effet soit B un réel négatif.
$-\sqrt{n} < B \Longleftrightarrow n > B^2$ en élevant au carré. En effet la fonction carré est **décroissante** sur $\mathbb{R}^-$

Par conséquent, tous les termes v_n de rang supérieur à B^2, seront dans l'intervalle $]-\infty\,;B[$

- Limite finie

Définition

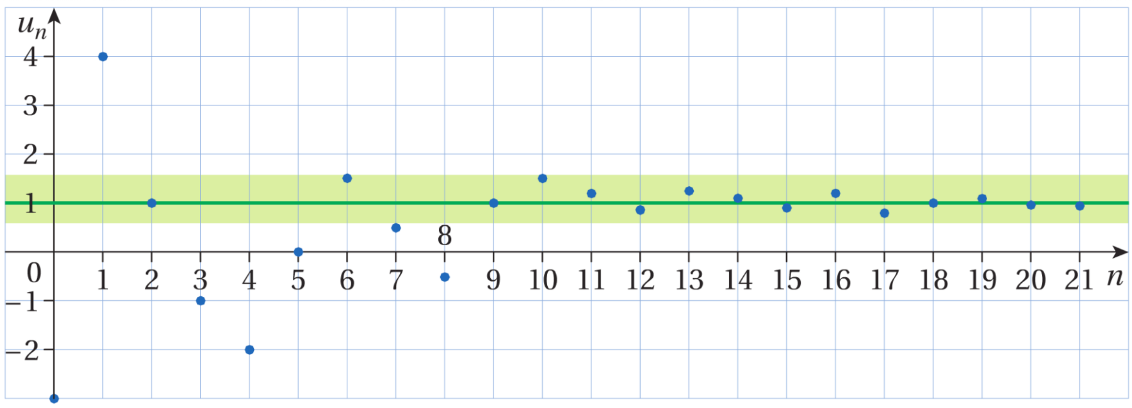
On dit que la suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient **tous les termes de la suite à partir d'un certain rang**.

On dit alors que la suite (u_n) est *convergente* et *converge vers* ℓ.

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Complément : Illustration

Dans le cas de la suite représentée ci-dessous, on voit que tous les termes **à partir du rang 9** appartiennent à un intervalle ouvert contenant 1 (matérialisé par la bande colorée en vert). Et plus l'intervalle ouvert se "**resserre**" autour de 1, plus il faut **aller chercher loin** le rang du terme à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle.



La suite représentée ici semble avoir pour limite 1

Remarque : Intervalle ouvert

Tout intervalle ouvert contenant *l* contient un intervalle ouvert centré en *l* de la forme $]\ell-\epsilon\,;\ell+\epsilon[$. On peut donc se contenter de chercher si tout intervalle ouvert de type $]l-\epsilon\,;l+\epsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarque

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0$

Fondamental : Unicité de la limite

Si une suite (u_n) converge vers une limite, alors cette limite est unique.