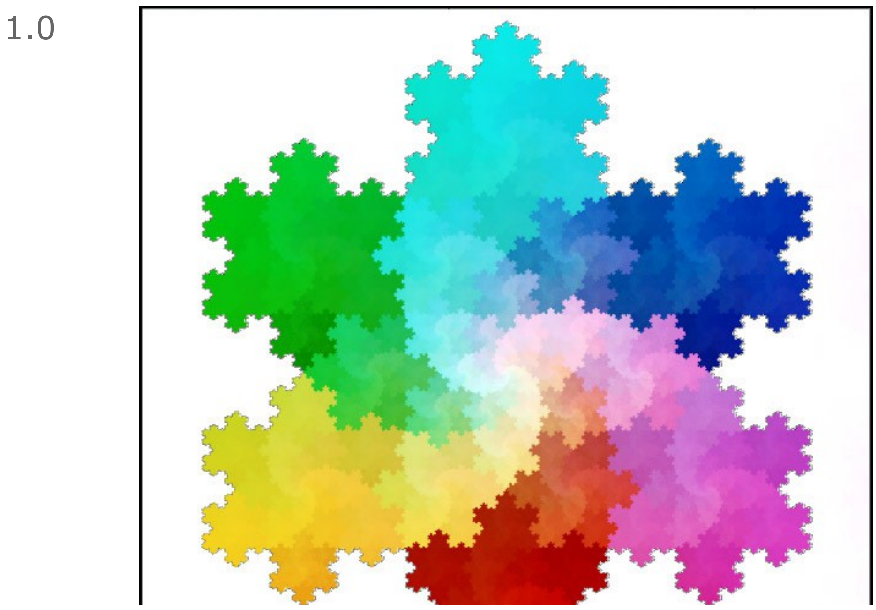
Terminale S

Les suites - Partie II : Les limites



Olivier Lecluse

Juillet 2013

Table des matières

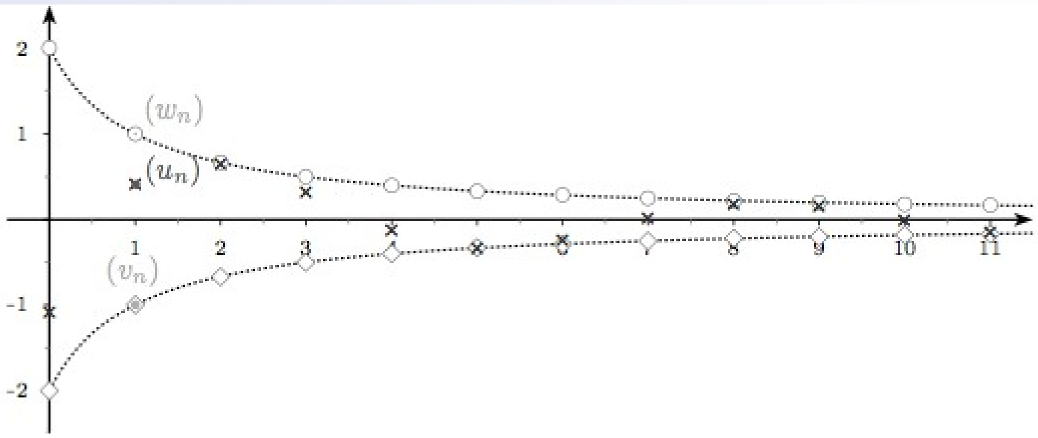
Limites et comparaison

I

A. Théorème d'encadrement dit "des gendarmes"

Fondamental : Théorème d'encadrement (admis)

Soient trois suites (v_n), (u_n) et (w_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
Si (v_n) et (w_n) **tendent vers la même limite** ℓ, alors la suite (u_n) **tend aussi vers** ℓ



Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$
On peut encadrer facilement la suite (u_n) par deux suites que l'on connaît bien :
Partant de l'inégalité pour tout n : $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$
en divisant chaque membre par n $(n \geqslant 1)$: $-\dfrac{1}{n} \leqslant \sin n \leqslant \dfrac{1}{n}$

Posons pour $n \geqslant 1$ $v_n = -\frac{1}{n}$ et $w_n = \frac{1}{n}$

On sait (ou on montre facilement) que (v_n) et (w_n) **tendent vers 0**

Le **théorème des gendarmes** nous permet d'affirmer que la suite (u_n) est **convergente** et que sa **limite est 0**.

B. ROC : Théorème de comparaison

Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$

Si,

- à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Si,

- à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Question

[*Solution n°1 p 25*]

Démonstration : ROC

C. Exercice

Question

[*Solution n°2 p 25*]

Étudier la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = n + 1 + (-1)^n$

Indice :

On pourra comparer la suite (u_n) avec une suite plus simple

Opérations sur les limites

II

Souvent pour calculer des limites, on s'appuie sur des limites de suites usuelles que l'on connaît et on applique des opérations sur celles-ci.

La plupart du temps ces opérations sont intuitives et relèvent du bon sens, mais attention, certaines cachent des pièges qu'il faudra déceler et éviter : ce sont les cas d'**indétermination**.

A. Limite d'une somme

Fondamental

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	/!\ /!\ /!\ _-_-_-_-_

Attention : Attention à l'indétermination ! !

La case ci-dessous désigne une indétermination donc une situation indécidable. Selon les cas, les limites pourront être finies ou infinies, ou ne pas exister.

Lorsque l'on tombe sur une indétermination, on doit utiliser d'autres moyens pour lever l'indétermination et répondre à la question posée.

/!\ /!\ /!\
_-_-_-_-_

Exemple

$u_n = n$ et $v_n = n - 1$. $u_n - v_n$ est une indétermination du type $\infty - \infty$.

Dans cet exemple, la limite vaut 1 puisque $u_n - v_n = 1$

Prenons un autre exemple avec $u_n = (n+1)^2$ et $v_n = (n-1)^2$. $u_n - v_n$ est une indétermination du type $\infty - \infty$.

Dans cet exemple, $u_n - v_n = 4n$ donc la limite de $u_n - v_n$ vaut ici $+\infty$

B. Limite d'un produit

Fondamental

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	/!\ /!\ /!\ _-_-_-_-_

Attention

On sera ici vigilant à l'indétermination $0 \times \infty$

Une méthode assez courante pour lever ce type d'indétermination est de mettre en facteur le terme qui semble prépondérant.

Exemple

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2}{n}$

Ce quotient peut d'écrire comme le produit de n^2+2 qui tend vers l'infini et $\dfrac{1}{n}$ qui tend vers 0...

En mettant en facteur les terme prépondérant : $\dfrac{n^2+2}{n}$ s'écrit

$$\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{n} = n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)$$

La forme est cette fois-ci en $\infty \times \ell \ (\ell > 0)$ qui tend vers $+\infty$. L'indétermination est levée.

C. Limite d'un quotient

Fondamental

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$0, v_n > 0$ pour tout n	$0, v_n < 0$ pour tout n
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Attention : Attention aux inverses de limites nulles

En fonction du signe de v_n, la limite peut être plus ou moins l'infini. Pour être déterminée, il faut que v_n garde **un signe constant à partir d'un certain rang**.

Exemple

Si $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$, alors la limite de $\frac{1}{v_n}$ ne peut être déterminée car v_n change constamment de signe.

En effet, $\frac{1}{v_n} = \frac{n}{(-1)^n}$ qui oscille entre des nombres très grands mais négatifs et des nombres très grands positifs, donc n'a pas de limites.

Complément

Connaissant le comportement du produit et de l'inverse, on en déduit le comportement de la limite d'un **quotient**, ce dernier pouvant être considéré comme le produit d'une limite par l'inverse de l'autre.

D. Exercice

Question 1

[*Solution n°3 p 25*]

Calculer $\lim_{n \to +\infty} 2 - 3n^2$

Question 2

[*Solution n°4 p 26*]

Calculer $\lim_{n \to +\infty} 2n^2 - n$

Indice :

Attention à l'indétermination ! !

Question 3

[*Solution n°5 p 26*]

Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1}$

Indice :

Attention à l'indétermination ! !

III

Limites ds suites arithmétiques et géométriques

A. Limites usuelles

Méthode : Limites de suites usuelles

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$ pour tout entier $k \geqslant 1$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$

Complément : Preuve pour n^2

Soit A un nombre réel quelqonque

Si $A \leqslant 0$, alors pour tout entier $n \geqslant 1, n^2 \geqslant 0 \geqslant A$. On pose alors $n_0 = 1$

Sinon, A>0. Dans ce cas, pour tout entier $n > \sqrt{A}, n^2 > A$ puisque la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Posons alors $n_0 = \mathbb{E}(\sqrt{A}) + 1$

On a alors pour tout entier $n \geqslant n_0, n^2 \in]A\,;+\infty[$

C'est donc bien que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Remarque

On procéderait de manière analogue pour les autres limites infinies.

Les limites nulles se déduisent par passage à l'inverse.

B. Limites des suites arithmétiques

Fondamental

Soit $u_n = u_0 + n \times r$ une suite arithmétique de raison r

- Si $r > 0$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$
- Si $r < 0$, la suite (u_n) tend vers $-\infty$
- Si $r = 0$, la suite (u_n) tend vers u_0 car elle est constante !

Complément : Démonstration

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

D'après les propriétés de la limite d'un produit,

- Si $r > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} nr = +\infty$
- Si $r < 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} nr = -\infty$

D'après les propriétés de la limite d'une somme,

- Si $r > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_0 + nr = +\infty$
- Si $r < 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_0 + nr = -\infty$

Exemple

Peut-on construire un escalier dont les marches font 17cm de hauteur pour monter au sommet d'une tour de 800m ?

Si u_n désigne la hauteur atteinte par un escalier de n marches, c'est une suite arithmétique de raison $0,17 > 0$.

Elle tend donc vers l'infini et dépassera à partir d'un certain rang la hauteur de 800m.

C. ROC : Limite de q^n avec q>1

Inégalité de Bernoulli

Pour $a > 0$ et tout entier *n*, on a l'inégalité $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Question 1

[*Solution n°6 p 26*]

ROC : Démontrer cette inégalité

Limite de q^n quand q>1

pour tout réel $q > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Question 2

[Solution n°7 p 27]

ROC : Démontrer cette limite

D. Limites des suites géométriques

Fondamental : Récapitulatif

Soit la suite (q^n) définie sur $\mathbb{N}$, avec $q \in \mathbb{R}$

- Si $q > 1,\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1,\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1,\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$ car la suite est constante.
- Si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite

Complément : Limite de q^n quand q>1

Ce premier point a été démontré en ROC précédemment.

Complément : Limite de q^n quand -1<q<1

On écarte le cas $q = 0$ qui n'est pas intéressant car dans ce cas, la suite est nulle. On suppose donc par la suite que $q \neq 0$

Posons $p = \frac{1}{q}$ si $q > 0$ ou $p = -\frac{1}{q}$ si $q < 0$

Ainsi, $p > 1$ et p^n tend donc vers $+\infty$

Or $q^n = \pm\frac{1}{p^n}$. On sait par propriété de la limite de l'inverse que q^n **tend vers 0** dans tous les cas.

Complément : Limite de q^n quand q\leq -1

On admet le résultat dans ce cas. Le problème qui se passe intuitivement c'est que la suite tend vers l'infini en valeur absolue, mais il y a une alternance de signe qui fait que la suite alterne entre des nombres positifs et négatifs l’empêchant ainsi de converger.

Exemple

Si on place 100€ à 2,5% d'intérêts, pour peu qu'on soit un peu patient... la somme placée dépassera un million d'euros... un jour. En effet, l'évolution suit une suite géométrique de raison 1,025>1 donc tend vers l'infini.

IV

Suites bornées et convergence monotone

A. Suites majorées, minorées, bornées

Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
La suite (u_n) est dite *majorée* s'il existe un réel *M* tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$
La suite (u_n) est dite *minorée* s'il existe un réel *m* tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$
La suite (u_n) est dite *bornée* si elle est majorée **et** minorée

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 - 5$
On sait que $n^2 \geqslant 0$ pour tout *n*
donc $n^2 - 5 \geqslant -5$ pour tout *n*
La suite (u_n) est donc minorée par -5

Exemple

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 3\cos n - 1$
On sait que $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ pour tout *n*
donc $-3 \leqslant 3\cos n \leqslant 3$ pour tout *n*
donc $-4 \leqslant 3\cos n - 1 \leqslant 2$ pour tout *n*
La suite (v_n) est donc bornée par -4 et 2

B. Exercice

Question

[Solution n°8 p 27]

Soit (u_n) la suite définie par

- $u_0 = 3$
- $u_{n+1} = 0,2u_n + 6$

Montrer que (u_n) est majorée par 7,5

Indice :

On pourra envisager un raisonnement par récurrence

C. Variations d'une suite

Définition : Sens de variation d'une suite

- Une suite (u_n) est dite *croissante* si pour **tout entier** n, $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est dite *décroissante* si pour **tout entier** n, $u_{n+1} \leq u_n$.

Attention, il ne suffit pas que ces inégalités soient vérifiées pour les 1ers termes seulement !

Méthode : Méthode pour étudier le sens de variation d'une suite

Calculer et étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n :

- Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite est croissante.
- Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite est décroissante.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2$.

Alors $u_n + 1 - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$

Pour tout entier naturel n, $2n + 1 \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

Méthode : Propriété

Soit f une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ et (u_n) la suite définie par la relation explicite $u_n = f(n)$

- Si f est croissante, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante, alors (u_n) est décroissante.

Attention : La réciproque de cette propriété est fausse

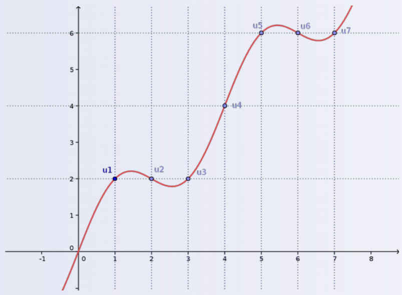


Image 1 .

Il est possible d'avoir (u_n) croissante sans que f le soit !

Méthode : Cas particulier d'une suite à termes positifs

Si $u_n > 0$ pour tout *n*, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

- Si pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ et $u_n > 0$, alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et $u_n > 0$, alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

D. Convergence des suites monotones

Fondamental : Propriété fondamentale des suites convergentes

Une suite qui **converge** est **bornée**

Complément

En effet, à partir d'un certain rang n_0, tous ses termes sont dans un intervalle ouvert comme $]\ell - 1 \,; \ell + 1[$ donc la suite est bornée à partir de ce rang.

Pour ses n_0 premiers termes, comme il n'y en a qu'un nombre fini, les valeurs sont également bornées entre la plus grande des n_0 valeurs et la plus petite.

Complément : Par contraposée

On en déduit qu'une suite non bornée est divergente.

Exemple

La suite $n \times (-1)^n$ est non bornée. On en déduit qu'elle diverge.

Fondamental : Théorème de convergence monotone (admis)

- Une suite **croissante majorée** est **convergente**
- Une suite **décroissante minorée** est **convergente**

E. ROC : Suites croissantes

Une suite croissante convergente est majorée par sa limite

Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$

Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$, alors la suite u_n est majorée par ℓ

Question 1

[Solution n°9 p 27]

ROC : Démontrer ce théorème

Théorème sur les suites croissantes non majorées

Si une suite est **croissante** et **non majorée**, alors elle tend vers $+\infty$

Si une suite est **décroissante** et **non minorée**, alors elle tend vers $-\infty$

Question 2

[Solution n°10 p 27]

ROC : Démontrer ce théorème

Attention

Les réciproques de ces théorèmes sont fausses ! ! une suite peut tendre vers l'infini et ne pas être croissante pour autant.

F. Utiliser les théorèmes de convergence monotone

On considère la suite (u_n) définie par

- $u_0 = \dfrac{3}{2}$
- $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$

Question 1

[Solution n°11 p 28]

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant 2$

Indices :

On pourra faire une récurrence

On pourra remarquer que $u_{k+1} = (u_k - 1)^2 + 1$

Question 2

[Solution n°12 p 28]

Montrer que pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$

Question 3

[Solution n°13 p 28]

Démontrer que (u_n) est décroissante

Indice :

Quel est le signe de $u_{n+1} - u_n$

Question 4

[Solution n°14 p 28]

La suite (u_n) est-elle convergente ?

Question 5

[Solution n°15 p 28]

Déterminer la limite de la suite (u_n)

Indice :

On pourra s'appuyer sur les théorèmes d'opération pour déterminer une équation vérifiée par la limite ℓ

Question 6

[Solution n°16 p 28]

Interpréter géométriquement ce phénomène

Indice :

Pour les suites définies par une récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$*, il est souvent commode de tracer sur un même graphique la courbe* $y = f(x)$ *et la droite* $y = x$

Test final partie II

V

Exercice 1

Vrai ou Faux ?

Exercice

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ *et si* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n = 0$

- ◯ Vrai
- ◯ Faux

Exercice

Si la suite (u_n) *converge vers un réel non nul et si* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Alors la suite $(u_n \times v_n)$ *ne converge pas*

- ◯ Vrai
- ◯ Faux

Exercice

Si la suite (u_n) *converge vers un réel non nul, et si la suite* (v_n) *est strictement positive telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

Alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ *ne converge pas.*

- ◯ Vrai
- ◯ Faux

Exercice

Si les suites (u_n) *et* (v_n) *convergent, alors la suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *converge.*

- ○ Vrai
- ○ Faux

Exercice 2

Cocher les propositions correctes :
Soit la suite (u_n) *définie pour tout n par* $u_n = (-1)^n$

- ☐ La suite (u_n) est bornée
- ☐ La suite (u_n) converge
- ☐ La suite de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

Exercice 3

Toute suite (v_n) *à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.*

- ○ Vrai
- ○ Faux

Exercice 4

Cocher les réponses vraies

- ☐ Toute suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1 converge vers 0.
- ☐ Toute suite géométrique de raison strictement supérieure à 1 diverge vers $+\infty$
- ☐ Toute suite géométrique de raison inférieure à -1 diverge et n'admet pas de limite.

Exercice 5

Cocher les réponses vraies

- [ ] Toute suite croissante majorée converge
- [ ] Toute suite croissante convergente est majorée
- [ ] Toute suite majorée convergente est croissante
- [ ] Toute suite décroissante est majorée

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 6)

*Méthode : **ROC** Démonstration à connaître*

Nous allons prouver le premier point. Le second se démontre de manière tout à fait analogue.

Considérons un réel A quelconque.

D'après la première hypothèse, il existe un rang n_1 à partir duquel si $n \geqslant n_1, u_n \geqslant v_n$

D'après la seconde hypothèse, on sait également qu'il existe un rang n_2 à partir duquel si $n \geqslant n_2, v_n > A$

Posons n_0 un entier supérieur à n_1 et n_2. Alors si $n \geqslant n_0$, $n \geqslant n_1$ et $n \geqslant n_2$, ce qui nous autorise du coup à utiliser les deux inégalités que nous avons dégagé de nos hypothèses :

- $u_n \geqslant v_n$
- $v_n > A$

Donc à partir du rang n_0, si $n > n_0, u_n > A$ et ceci avec un nombre A arbitrairement choisi.

La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$. cqfd.

> Solution n°2 (exercice p. 6)

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n$.

On sait que $(-1)^n \geqslant -1$ donc $n + 1 + (-1)^n \geqslant n + 1 + (-1) = n$

Donc pour tout *n*, on a $u_n \geqslant v_n$

Or la suite (v_n) tend vers $+\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison, la suite (u_n) tend aussi vers $+\infty$

> Solution n°3 (exercice p. 9)

On sait (ou on montre facilement que) $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} n \times n = +\infty$ $(+\infty \times +\infty)$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} -3n^2 = -\infty$ $(\ell < 0 \times +\infty)$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - 3n^2 = -\infty$ $(\ell + -\infty)$

> Solution n°4 (exercice p. 9)

On sait que $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. On a donc une forme indéterminée $\infty - \infty$

Pour lever l'indétermination, on met le terme prépondérant (ici n^2) en facteur :

$2n^2 - n = n^2\left(2 - \frac{1}{n}\right)$. Le premier facteur tend vers l'infini et le second vers 2.

L'indétermination est levée car on a une forme en $+\infty \times \ell > 0$

$\lim_{n\to+\infty} 2n^2 - n = +\infty$.

> Solution n°5 *(exercice p. 9)*

Ici le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini. On a donc une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\infty \times 0$

Une fois encore, on met le terme prépondérant en facteur :

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

L'indétermination est levée après simplification car on a une limite du type $\frac{\ell}{\ell'}$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

> Solution n°6 *(exercice p. 12)*

Méthode : Démonstration de l'inégalité de Bernoulli

Posons $\mathcal{P}_n$ la propriété disant que pour tout réel a>0 et n donné, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

`1. Initialisation`

Si $n = 0$ et $a > 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0a = 1$. Comme $1 \geqslant 1$, la propriété $\mathcal{P}_0$ est **vraie** donc la récurrence est initialisée

`2. Hérédité`

Supposons que pour $a > 0$ et un certain rang *n*, la propriété $\mathcal{P}_n$ soit **vraie**. Démontrons la au rang $n+1$.

On sait que l'on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+na)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie car on a multiplié l'inégalité par (1+a)>0.

En développant, on obtient $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + na + a + na^2$

Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a + na^2$

Or $na^2 > 0$ donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$.

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc **vraie**. Elle est **héréditaire**.

`3. Conclusion`

On en déduit d'après le principe de récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout *n*, à savoir :

pour $a > 0$ et tout entier *n*, on a l'inégalité $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

> Solution n°7 (exercice p. 13)

Complément : Limite de q^n quand q>1

Puisqu'on est dans le cas $q > 1$, on peut écrire $q = 1 + a$ avec $a > 0$

On peut alors appliquer l'inégalité de Bernoulli que nous avons démontrée précédemment :

$q^n \geqslant 1 + an$ avec $a > 0$

On sait par les propriétés du produit de limites et de somme que $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + an = +\infty$ puisque $a > 0$

On en déduit d'après le *théorème de comparaison* - p.31 que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

> Solution n°8 (exercice p. 16)

Posons $\mathcal{P}_n$ la propriété que $u_n \leqslant 7,5$

1. Initialisation
   $u_0 = 3$ donc inférieur à 7,5. $\mathcal{P}_0$ est **vraie**.
2. Hérédité
   Supposons que pour un certain rang k, $\mathcal{P}_k$ soit vraie
   $u_{k+1} = 0,2u_k + 6$
   Or $u_k \leqslant 7,5$ donc $0,2u_k + 6 \leqslant 0,2 \times 7,5 + 6 = 7,5$
   par conséquent $u_{k+1} \leqslant 7,5$ ce qui prouve que $\mathcal{P}_{k+1}$ est **vraie**.
3. Conclusion
   Par récurrence, on en déduit que pour tout *n*, $u_n \leqslant 7,5$ donc u_n est **majorée par 7,5**.

> Solution n°9 (exercice p. 18)

*Méthode : **ROC** Démonstration à connaître*

Démontrons cette propriété par **l'absurde** : Supposons qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$

Comme $u_{n_0} > \ell$, l'intervalle $]\ell - 1 ; u_{n_0}[$ est un intervalle ouvert qui contient ℓ. Cet intervalle contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_1

Maintenant, on sait que la suite est croissante donc si on prend un entier *n* **supérieur** à n_0 et n_1, on a :

- $u_n > u_{n_0}$ puisque la suite est croissante et $n > n_0$
- $u_n < u_{n_0}$ puisque u_n se trouve dans l'intervalle $]\ell - 1 ; u_{n_0}[$

Ces deux affirmations contradictoires prouvent que l'hypothèse de départ est impossible.

La suite u_n est donc majorée par ℓ

> Solution n°10 (exercice p. 18)

*Méthode : **ROC** Démonstration à connaître*

Soit (u_n) une suite non majorée.

On en déduit que pour tout réel *M*, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > M$

Mais comme (u_n) est croissante, si $n > n_0, u_n > u_{n_0} > M$

On vient donc d'écrire qu'à partir du rang n_0, les valeurs de (u_n) sont dans

l'intervalle $]M\,;+\infty[$ et ce pour n'importe quelle valeur de *M*.
Par définition, on peut affirmer que (u_n) tend vers $+\infty$
L'autre partie se démontre de manière analogue.

> Solution n°11 *(exercice p. 18)*

Posons $\mathcal{P}_n$ la propriété que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$

1. Initialisation
   $u_0 = 1,5$ donc compris entre 1 et 2. $\mathcal{P}_0$ est **vraie**.
2. Hérédité
   Supposons que pour un certain rang k, $\mathcal{P}_k$ soit vraie
   $u_{k+1} = u_k^2 - 2u_k + 2$
   $u_{k+1} = (u_k - 1)^2 + 1$. Or $0 \leqslant u_k - 1 \leqslant 1$, il en est donc de même pour $(u_k - 1)^2$
   Donc $1 \leqslant (u_k - 1)^2 + 1 \leqslant 2$
   par conséquent $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$ ce qui prouve que $\mathcal{P}_{k+1}$ est **vraie**.
3. Conclusion
   Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant 2$

> Solution n°12 *(exercice p. 18)*

En développant, on obtient que $(u_n - 2)(u_n - 1) = u_n^2 - 3u_n + 2 = u_{n+1} - u_n$

> Solution n°13 *(exercice p. 18)*

La première question nous permet de dire que pour tout *n*

- $u_n - 1 \geqslant 0$
- $u_n - 2 \leqslant 0$

La seconde question permet de remarquer que le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le même que celui du produit $(u_n - 1)(u_n - 2)$ donc **négatif pour tout *n***
On en déduit donc que (u_n) est décroissante

> Solution n°14 *(exercice p. 18)*

La suite (u_n) est **décroissante** et **minorée** donc on peut affirmer grâce au **théorème de convergence monotone** que (u_n) converge.

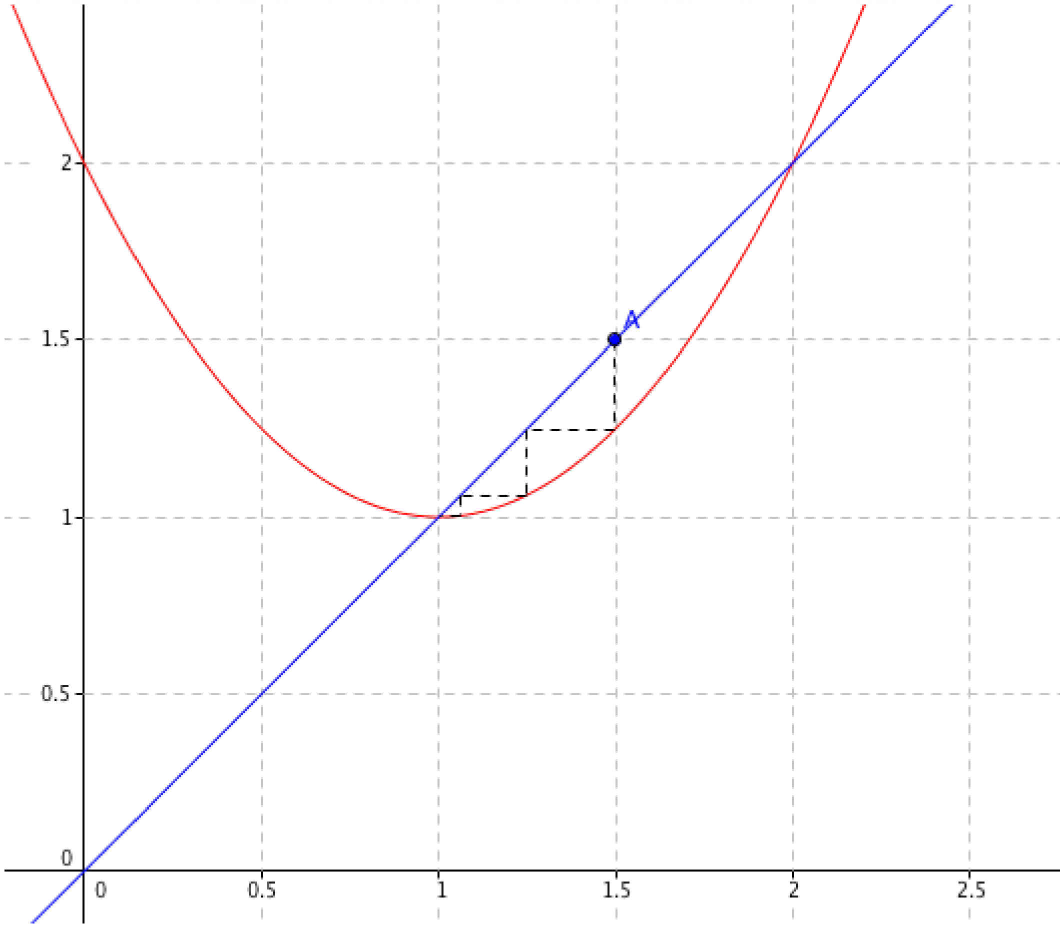
> Solution n°15 *(exercice p. 19)*

u_{n+1} tend vers ℓ
$u_n^2 - 2u_n + 2$ tend vers $\ell^2 - 2\ell + 2$
La limite ℓ est donc une solution de l'équation $\ell = \ell^2 - 2\ell + 2$
L'équation $\ell^2 - 3\ell + 2 = 0$ admet deux solutions : $\ell = 1$ et $\ell = 2$
Or la solution $\ell = 2$ est à rejeter car $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et (u_n) est décroissante.
On en déduit donc que la limite de la suite (u_n) est $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

> Solution n°16 *(exercice p. 19)*

Méthode

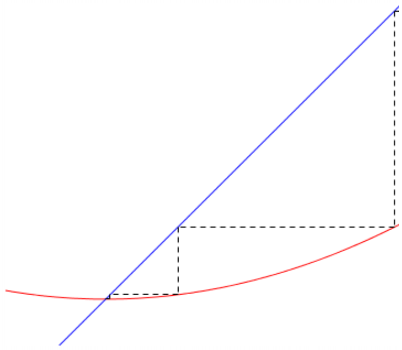
1. On trace sur le même graphique la courbe $C_f\ : y = x^2 - 2x + 2$ et la droite $\Delta\ : y = x$
2. On place le point $A(1,5\,;1,5)$ correspondant au départ de la suite $(u_0 = 1,5)$
3. Depuis ce point, on rejoint la courbe C_f et on reporte l'ordonnée sur la droite Δ. On obtient un nouveau point dont les coordonnées matérialisent u_1
4. On répète l'étape précédente autant de fois que nécessaire pour matérialiser les premiers termes de la suite.



Complément

On s'aperçoit dans cette construction que la suite est décroissante puisque les points de Δ se rapprochent de l'origine au fur à mesure de la construction

De plus on constate que la construction forme une sorte *d'escargot* qui se retrouve coincé au point où les courbes C_f et Δ se croisent. Ce point d'intersection des deux courbes est donc la limite de la suite.



On retrouve ainsi géométriquement que la limite de la suite (u_n) est une des deux solutions de l'équation $f(x) = x$ (ici $x = 1$)

Contenus annexes

- Théorème de comparaison

Fondamental

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$

Si,

- à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Si,

- à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

*Méthode : **ROC** Démonstration à connaître*

Nous allons prouver le premier point. Le second se démontre de manière tout à fait analogue.

Considérons un réel A quelconque.

D'après la première hypothèse, il existe un rang n_1 à partir duquel si $n \geqslant n_1, u_n \geqslant v_n$

D'après la seconde hypothèse, on sait également qu'il existe un rang n_2 à partir duquel si $n \geqslant n_2, v_n > A$

Posons n_0 un entier supérieur à n_1 et n_2. Alors si $n \geqslant n_0$, $n \geqslant n_1$ et $n \geqslant n_2$, ce qui nous autorise du coup à utiliser les deux inégalités que nous avons dégagé de nos hypothèses :

- $u_n \geqslant v_n$
- $v_n > A$

Donc à partir du rang n_0, si $n > n_0, u_n > A$ et ceci avec un nombre A arbitrairement choisi.

La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$. cqfd.