La suite de Fibonacci et le nombre d'or

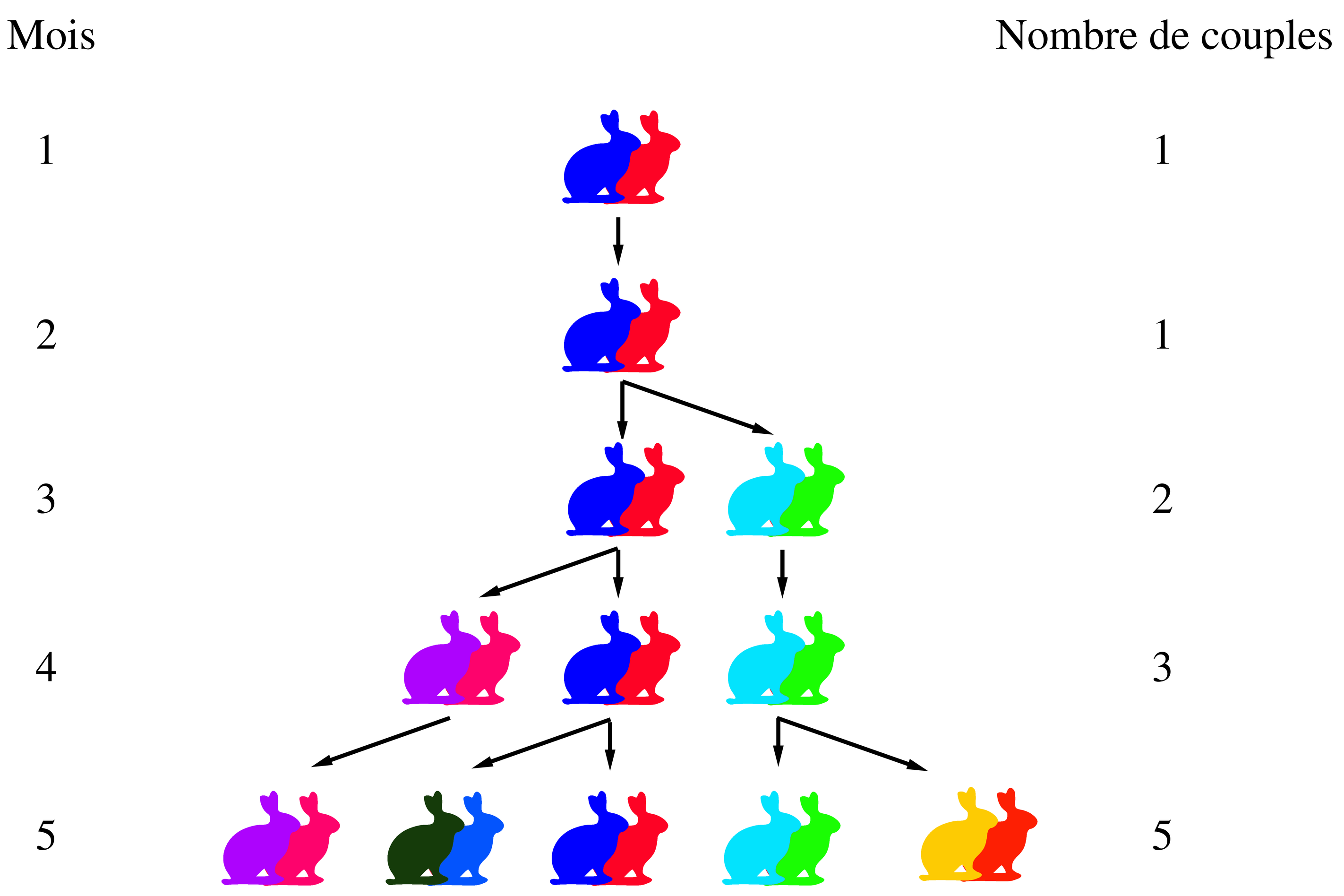
UNIVERSITAS FRIBURGENSIS

1. Les lapins de Fibonacci

EN 1202, Fibonacci s'intéressa au problème de croissance d'une population de lapins dans des circonstances idéales. Le problème est le suivant :

- on commence avec un couple de jeunes lapins,
- un lapin âgé d'un mois est capable de se reproduire,
- un couple de lapins (en âge de se reproduire) donne naissance à un autre couple de lapins tous les mois.

Fibonacci se posa la question suivante : combien y aura-t-il de couples de lapins après une année ? La figure ci-dessous illustre l'évolution du nombre de couples de lapins au fur et à mesure des mois.

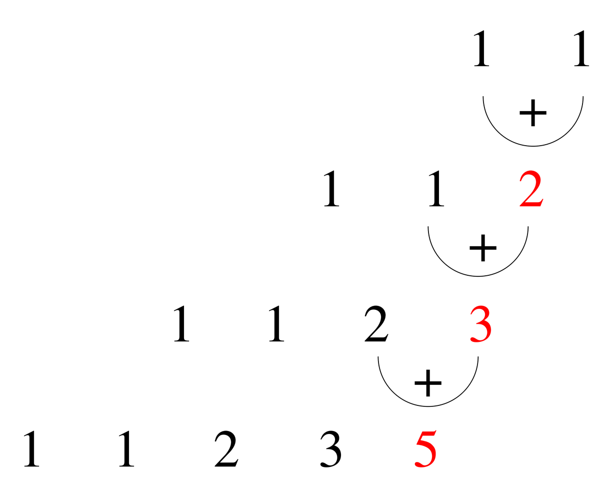


Evolution idéale d'une population de lapins.

On remarque que la suite formée par les nombres de couples après chaque mois est la suivante :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,...

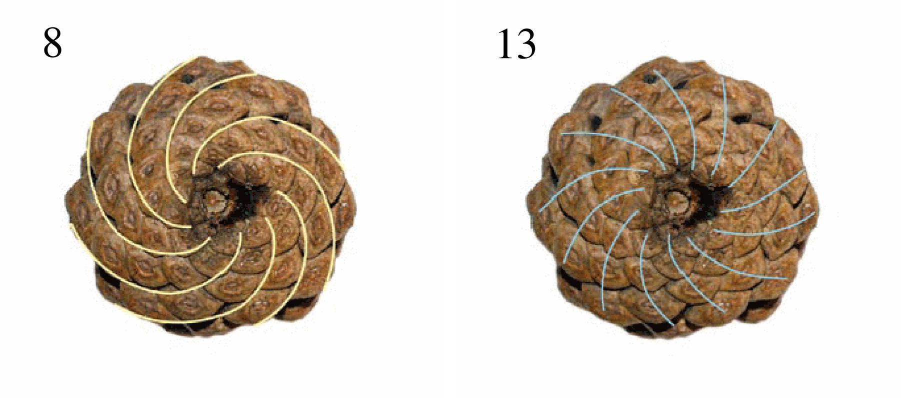
Cette suite de nombres est appelée **suite de Fibonacci** et peut être formée de la manière suivante :



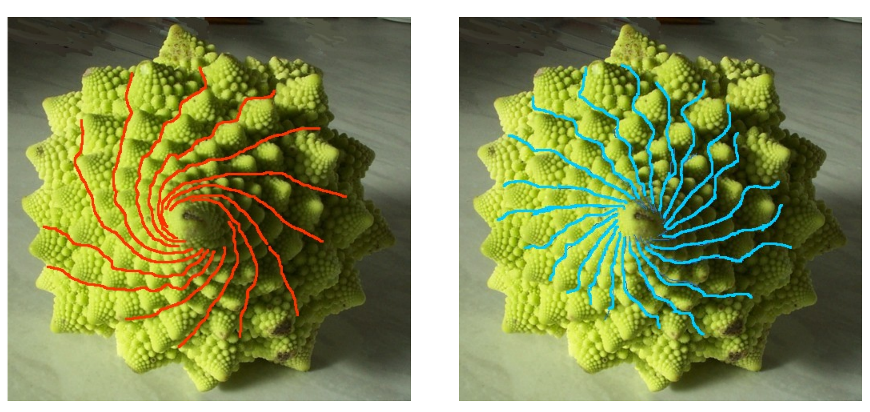
La construction de la suite de Fibonacci

On peut retrouver cette suite de nombres étonnamment souvent dans la nature.

Par exemple, les pives sont composées de 8 spirales dans le sens horaire et de 13 spirales dans le sens antihoraire, deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci :



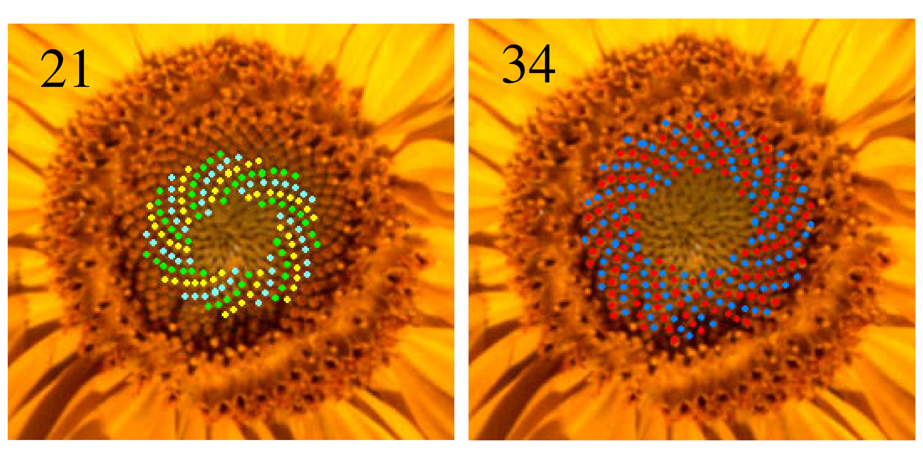
Les pives et la suite de Fibonacci



La romanesco et la suite de Fibonacci

Le romanesco possède 13 spirales dans le sens horaire et 21 spirales dans le sens anti-horaire, toujours deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci.

Le coeur d'un tournesol est composé de fleurons arrangés en spirales, 21 spirales dans le sens horaire et 34 spirales dans le sens anti-horaire.

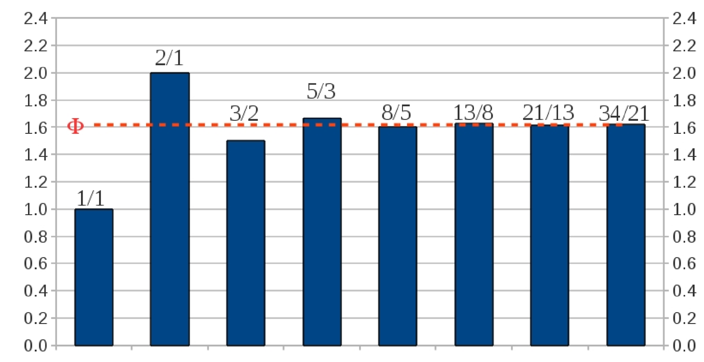


Le coeur d'un tournesol

2. Le nombre d'or

En observant la suite de Fibonacci, on peut remarquer que si l'on divise chaque nombre de la suite par son prédécesseur, on obtient une suite de nombre qui se rapproche petit à petit d'un nombre Φ appelé nombre d'or, dont la valeur est :

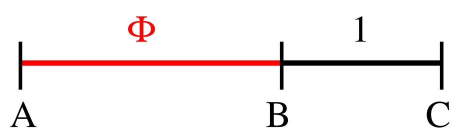
$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$$



Le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci

et est le seul nombre positif possédant la propriété géométrique suivante :

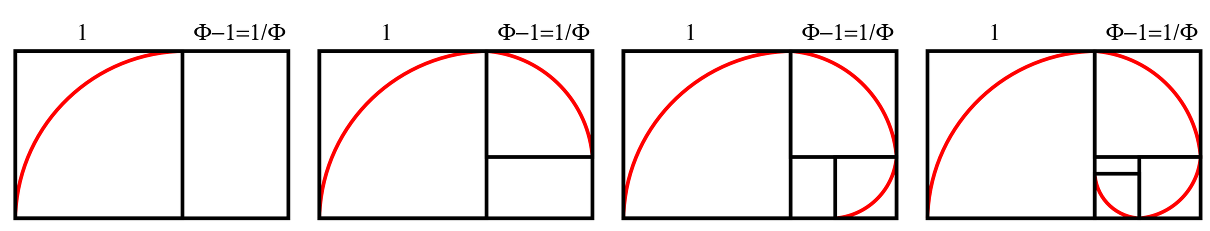
$$\frac{1+\Phi}{\Phi} = \frac{\Phi}{1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\text{longueur de AC}}{\text{longueur de AB}} = \frac{\text{longueur de AB}}{\text{longueur de BC}}$$



Proportion d'or

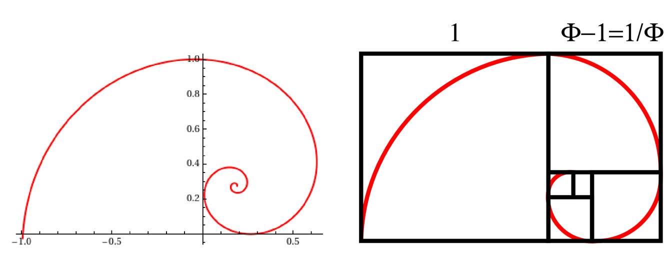
3. La spirale d'or

A l'aide du nombre d'or, on peut dessiner une "spirale" de la manière suivante : on trace un rectangle de côtés 1 et Φ et un arc de cercle dans le carré de côté 1. A partir du rectangle de côtés $1/\Phi = \Phi - 1$ et 1, on trace un carré de côté $1/\Phi$ et un arc de cercle à l'intérieur de ce dernier et ainsi de suite...



Approximation d'une spirale à l'aide du nombre d'or Φ

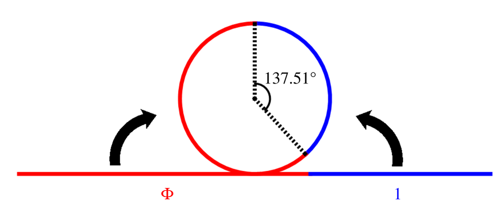
On n'obtient pas tout-à-fait une spirale mais plutôt une suite d'arcs de cercle qui donne une bonne approximation d'une spirale appelée **spirale d'or**.



La spirale d'or et son approximation

4. L'angle d'or

L'angle d'or est égal à environ 137.51° et est obtenu en prenant la section d'or de la circonférence du cercle :



L'angle d'or

L'angle d'or est très présent dans la nature, par exemple entre deux feuilles conséctuives d'une plante.

Références

[1] Le site du collège Smith : http ://www.math.smith.edu/phyllo/

Exposition "Plantes, spirales et nombres", Jardin botanique, Fribourg, septembre 2010 / Ausstellung "Pflanzen, Muster und Zahlen", Botanischer Garten, Freiburg, September 2010